SOCIETÀ DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI
(GIÀ SOCIETÀ REALE DI NAPOLI)

Q
54
N23
ser.4
v.15-17
1948-50

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XV. — (Anno LXXXVII)

gennaio - dicembre 1948

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22.568
1949

Pubblicato il 6 maggio 1949

SOCIETÀ DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI
(GIÀ SOCIETÀ REALE DI NAPOLI)

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

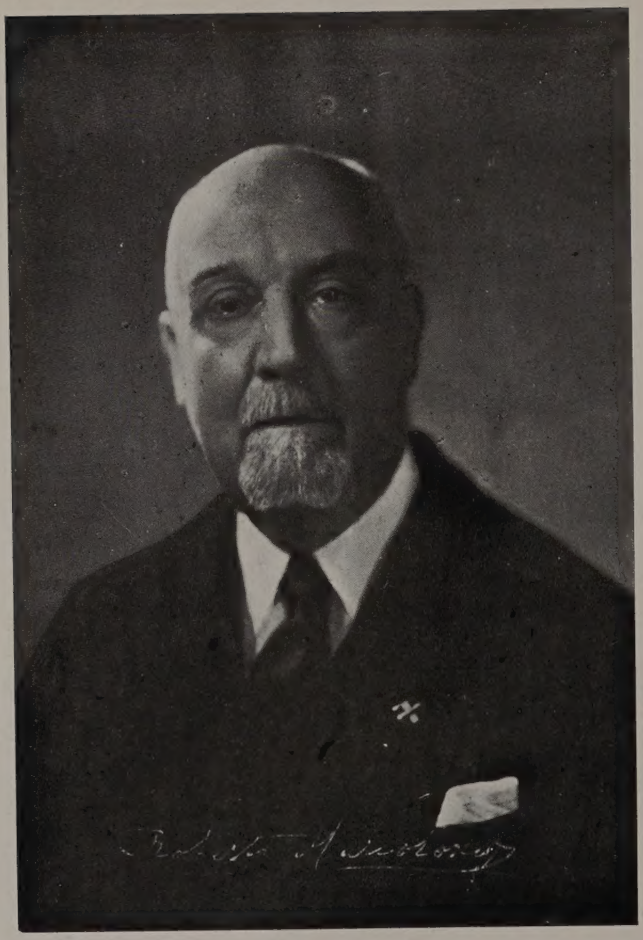
DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XV. — (Anno LXXXVII)

gennaio - dicembre 1948

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22.568
1949



ROBERTO MARCOLONGO

n. in Roma, il 24 agosto 1862 m. in Roma il 15 maggio 1943

ROBERTO MARCOLONGO

Commemorazione letta dal socio corrispondente **Mario Pascal**

(Adunanza del dì 3 gennaio 1948)

Chi rileggesse l'elenco dei componenti la Facoltà matematica di Napoli nel periodo di tempo che dal primo decennio del secolo giunge fino agli anni immediatamente dopo la prima guerra mondiale, non potrebbe non meravigliarsi del caso che aveva riuniti nella medesima Facoltà tanti uomini di così illustre nome per estensione e profondità di dottrina e di così celebrata rinomanza per austerità e nobiltà di vita.

E chi, per aver avuta la fortunata opportunità di seguire i corsi che in quel periodo di tempo da quegli uomini si tenevano nelle vecchie aule dell'edificio del Salvatore, volesse ritornare col pensiero a quei tempi e a quegli insegnamenti, non potrebbe non sentire nel ricordo una grande dolcezza ed una dilettosa commozione. Perchè il caso aveva voluto che in quel tempo fossero riuniti nella medesima Facoltà uomini che dell'insegnamento avevano veramente fatta una missione nobilissima e che all'alto sentire ed alla profondità e all'acume nella ricerca scientifica avevan mirabilmente congiunto una raffinata prestanza nell'arte delicata dell'educare e dell'insegnare.

Eran quelli i tempi in cui nelle stesse aule dettavano i loro corsi Gabriele Torelli, Domenico Montesano, Ernesto Pascal, Roberto Marcolongo ciascuno dei quali, illustre e celebrato nel campo vasto degli studi e delle ricerche, aveva in comune con gli altri la passione dell'insegnamento e la consumata abilità in quell'arte dell'insegnare, che faceva sì, che le lezioni da essi impartite riuscissero giorno per giorno, ed ogni giorno, un gioiello di tersa chiarezza, uno specchio di limpida purezza, un prodigio di semplicità e nel tempo stesso di profondità.

Ad uno ad uno, l'uno dopo l'altro, questi Maestri sono andati scomparendo. Ultimo, è scomparso Roberto Marcolongo.

Roberto Marcolongo era nato a Roma il 24 agosto 1862 ed in Roma aveva compiuto tutti i suoi studi e di Roma aveva conservato sempre la parlata scoppiettante ed arguta e lo spirito a volte bonario, a volte frizzante e pungente, ma sempre sereno. Laureatosi nel 1886, dopo esser stato allievo di Giuseppe Battaglini, di Luigi Cremona e specialmente di Valentino Cerruti che gli aveva dato il gusto, che gli fu sempre prediletto, delle discipline meccaniche, fu nominato nel 1895 professore di meccanica razio-

nale a Messina, e nel 1908 fu chiamato con voto unanime della Facoltà a Napoli, per succedere a Francesco Siacci.

A Napoli egli rimase, fino al raggiungimento dei limiti di età, per circa un ventennio, e per circa un ventennio le cattedre di Meccanica Razionale e di Meccanica Superiore e il Gabinetto di Meccanica Razionale che Egli aveva fondato, ed al cui sviluppo tante cure Egli poneva, lo videro prodigarsi con inesausto entusiasmo per insegnare, per indirizzare i giovani allo studio e guidarli alla ricerca scientifica, per consigliarli, aiutarli, sorreggerli. Egli portava nell'esercizio delle sue funzioni di professore un'alacrità di lavoro, una vivacità di azione, un sempre rinascente entusiasmo che traevano le loro origini dalle doti fondamentali del suo spirito e della sua mente: chiarezza di percezione, vivezza di immaginazione, prontezza, rapidità e sicurezza di assimilazione.

La facilità dell'eloquio, la precisione ed il sapore della dizione, il porgere misurato e garbato rendevano le lezioni del professore Marcolongo un sempre rinnovato capolavoro di eleganza e di semplicità. Dalla lezione accademica uscivan tutti con la convinzione, magari sbagliata, di aver capito e con la soddisfazione di aver assistito alla creazione di un'opera d'arte. Era difficile, molto difficile, ed ora lo sarà ancora di più, tentare di uguagliare il Maestro quale conferenziere. Bastava che Egli salisse alla cattedra e guardasse il suo pubblico con quei suoi occhi buoni e quel suo viso aperto e sereno perchè si stabilisse fra il pubblico e l'oratore quel medesimo legame di simpatia cordiale e di devozione ammirata che ha sempre caratterizzato i rapporti fra il Maestro e i suoi discepoli.

Conversatore brillante ed arguto, conferenziere elegante e saporoso, maestro profondo ed acuto non c'era concetto astruso o delicato, idea difficile o riposta ch'Egli non afferrasse e non sapesse poi trovar modo di esporre limpidamente e chiaramente. Nell'arte dell'insegnare e dell'esporre Egli è arrivato a fastigi che ben raramente sono stati raggiunti.

Quando si commemora un parlatore o un oratore è ben difficile far risentire a chi non lo ha inteso parlare quello speciale incanto e quel fascino particolare che si sprigionava dalle parole, dal gesto, dall'espressione di colui che si vuol ricordare. Ma per il professor Marcolongo che prima di essere un uomo di gusto e di delicato temperamento artistico, era un uomo di scienza, il compito di ricordare e di tramandare l'incanto che si diffondeva dalla parola parlata, è meno arduo perchè quel medesimo incanto Egli ha trasfuso e lasciato nella parola scritta, di guisa che nei suoi libri, nei trattati, nei corsi di lezione, nelle memorie che Egli ha redatto e ci ha lasciato si ritrovano a prima lettura quelle caratteristiche di esposizione elegante, di chiara semplicità, di tersa finezza e di profondità che eran proprio quelle che rendevano tanto seducente la sua esposizione verbale.

Rimangono del Marcolongo i corsi delle sue lezioni sulla teoria matematica dell'elasticità che, apparsi prima come dispense litografiche furono

poi riuniti nel volume sulla Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici (1904) nella collezione dei Manuali Hoepli, così come nella stessa collezione sono i due volumi della Meccanica razionale che riproducono e completano le sue dispense del corso scolastico delle lezioni di Meccanica che giunse alla quinta edizione e che è stato ed è un modello di elegante chiarezza. Rimangono ancora del Maestro il volume, anch'esso dei Manuali Hoepli, sul Problema dei tre corpi da NEWTON ai nostri giorni e quello sulla Relatività, edito dal Principato di Messina.

Di questo che è il risultato della elaborazione minuziosa, acuta e amorosa fatta dal Maestro per portar nella scuola e far gustare agli allievi la bellezza delle costruzioni matematiche, fu detto: « La lecture de ce livre nous laisse l'impression d'un chapitre classique d'analyse ou de mécanique: c'est peut-être par sa semplicité, sa clarté, son élégance ». Quello è l'espressione di un altro lato dell'attività del Maestro, la passione cioè per la ricerca storica che per tutta la sua vita il MARCOLONGO ha con particolare compiacenza curato e che lo ha portato dai primi esami accurati della figura e dell'opera scientifica di G. Mozzi e di G. FRISI agli studi recenti sull'opera di Leonardo da VINCI.

Il nome di MARCOLONGO nel campo scientifico è particolarmente legato alla creazione ed alla diffusione del calcolo vettoriale ed omografico che Egli concepiva (differendo in ciò profondamente dal suo collaboratore, in questo campo, C. BURALI FORTI) non già come un metodo esclusivo che tutti gli altri tentasse di eliminare e a tutti gli altri volesse sovrapporsi ma come un efficace aiuto alla comprensione ed un prezioso ausilio alla chiarificazione dell'intima essenza dell'andamento dei fenomeni meccanici. Le doti preclare di semplicità e di chiarezza del suo spirito si compiacevano della semplicità e della nettezza che i metodi vettoriali portavano nel campo meccanico, ma la misura ed il garbo della sua mente rifuggivano da ogni e qualunque specie di esagerazione.

Egli era sempre chiaro, semplice, netto nella esposizione, elegante anche quando sembrava far mostra di erudizione, acuto quando la sua erudizione appunto lo portava ad accenni e a richiami che bastavano ad indicare nuove vie da seguire e nuovi risultati da raggiungere. Qualità spirituali queste che lo portarono naturalmente a scrivere libri di testo per l'insegnamento secondario e che fecero sì che tali libri di testo, coi quali Egli ha cercato anche di introdurre i metodi vettoriali nell'insegnamento secondario, riuscissero lavori di sobria chiarezza, e di sicura utilità per la scuola.

I meriti di Roberto MARCOLONGO quale studioso, quale ricercatore, quale espositore, quale insegnante furono riconosciuti anche durante la sua vita. Ne fan fede le sue nomine a socio di molte Accademie italiane e straniere: recentemente era anche stato nominato Accademico d'Italia. Ma ora che Roberto MARCOLONGO ci ha lasciati è con amaro rimpianto che noi che lo abbiamo amato ed ammirato ripensiamo alla sua mirabile figura di uomo

e di insegnante e di scienziato. Rimpianto amaro perchè vorremmo potergli dire ancora tutto il nostro affetto devoto; rimpianto amaro perchè avremmo voluto collocare sulla sua tomba un simulacro di marmo pario che fosse degno di Lui e del suo grande cuore, ma ahime! non vi abbiamo posto che una croce di legno bagnato di lacrime.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

ABBREVIAZIONI

A. A. N. = Atti Acc. Sc. Napoli.
A. I. N. = Annali Ist. Navale Napoli.
A. M = Annali di matem.
A. P. M. = Atti Acc. Peloritana Messina.
A. P. N. = Atti Acc. Pontaniana Napoli.
B. B. S. = Boll. bibliogr. e storia Sc. mat.
B. M. = Boll. di matem.
B. U. M. = Boll. Unione matem. ital.
C. M. P. = Rend. Circolo mat. Palermo.
E. I. = Enciclopedia ital.
E. M. = Enseig. Math.
G. M. B. = Giorn. mat. di Battaglini.
J. S. M. = Jornal Sc. math. e astron. Porto.
M. A. L. = Mem. Acc. Lincei.
N. A. = Nuova Antologia.
N. C. = Nuovo Cimento.
P. M. = Periodico di matem.
R. A. L. = Rend. Acc. Lincei.
R. A. N. = Rend. Acc. Sc. Napoli.
R. M. F. = Riv. mat., fis. e Sc. nat.
Sa. = « Sapere » Milano.
Sc. = « Scientia » Bologna.
S. M. R. = Rend. Seminario mat. Roma.

Sull' analisi indeterminata di 2° grado. G. M. B., 25. 1887.
Su di un teorema di algebra elementare. G. M. B., 25, 1887.
Generalizzazione di un teorema di algebra elementare. G. M. B., 25, 1887.
Sull' analisi indeterminata di 2° grado. G. M. B., 26, 1888.
Sulla rappresentazione conforme della pseudosfera ed applicazioni. R. A. N., (2), 2, 1888.
Sull' equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile. R. A. N., (2), 2. 1888.
Sul teorema di Poisson. R. A. N., (2), 2, 1888.
Sulla variazione di un integrale definito e sulla teoria delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine. R. A. N., (2), 2, 1888.
Teorema di Meccanica. C. M. P, t. 2, 1888.
Sull' accelerazione nel moto di un solido intorno ad un punto fisso. G. M. B., 27, 1889.
Alcuni teoremi sulle funzioni cilindriche di 1ª specie. R. A. N., (2), 3, 1889.
Su alcuni sistemi di equazioni alle derivate parziali. R. A. N., (2), 3, 1889.
Equilibrio di elasticità di un corpo isotropo indefinito limitato da un piano indefinito. R. A. N., (2), 3, 1889.
Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per speciali condizioni ai limiti. R. A. L., (4), 5, 1889.
Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro. R. A. L., (4), 6, 1890.

Sulla deformazione di un corpo elastico indefinito limitato da un piano indefinito con speciali condizioni ai limiti. R. A. N., (2), 5, 1891

Osservazioni alla Nota: Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro R. A. N., (2), 5, 1891.

Alcune applicazioni delle funzioni ellittiche alla teoria dell' equilibrio dei fili flessibili ed inestensibili. Nota I-II. R. A. N., (2), 6, 1892.

Risoluzione dei due problemi relativi alla deformazione di una sfera isotropa. R. A. L., (5), 1, 1892.

Intorno ad un punto della teoria della rotazione di un corpo. C. M. P., 7, 1893.

Sulla ricerca dei centri di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura mobile. C. R. M., 7, 1893.

Sur les lignes géodesiques des paraboloïdes. J. S. M., 11, 1893.

Sur un cas particulier du mouvement d' un corps solide dans un fluide indéfini. J. S. P., 12, 1894.

Sopra due moti di Poinsot concordanti. A. M., (9), 22, 1894.

Deformazione di una sfera isotropa. A. M., (2), 23, 1895.

Sulla equazione $\Delta_2 u + k^2 u = 0$ *in uno spazio a più dimensioni.* A. M., (2), 24, 1896.

Sur une propriété de deux mouvements à la Poinsot concordants. J. S. M., 13, 1897.

Les composantes de deformation d' un milieu continu. J. S. M., 13, 1897.

Formole per la composizione di più moti finiti. A. M., (2), 26, 1897.

Spostamento di una figura di forma invariabile e composizione di moti finiti. A. P. M., 13, 1899.

Sul potenziale elettrodinamico di Helmholtz. A. P. M., 15, 1901.

Determinazione della funzione di Green di grado n nel caso della sfera. R.A.L., (5), 10, 1901.

Teoria dei vettori. Le Matematiche pure ed applicate. 1, 1901.

Les paramétres rationnels de Rodrigues. J. S. M., 14, 1901.

Sur une démonstration d' un théoreme de Jacobi. J. S. M., 14, 1901.

Sulla teoria delle funzioni sferiche. A. P. M., 16, 1902.

Risoluzione del problema di Dirichelet per un solido limitato da due cilindri retti coassiali e da due piani passanti per l' asse. A. P. M., 16, 1902.

La deformaz. del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti. R.A L., (5), 17, 1902.

Le cours de Mécanique de Ch. Cellerier. E. M., 4, 1902.

Teoria del giroscopio simmetrico pesante. A. M., (3), 7, 1902.

Sulla funzione di Green di grado n per la sfera. C. M. P., 15, 1902.

Osservazioni intorno alla Nota del sig. Kolossoff: Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d' un corp pesant autour d' un point fixe. C. M. P., 15, 1902.

Relazione sull' ordinamento dei programmi della Scuola d' Arti e Mestieri di Messina. Stab. Giupi, Messina, 1902.

Teoria Matematica dell' elasticità. I, II. Litografia Massara, 1903.

Le moderne teorie di Fisica matematica. Discorso inaugurale. Ann. Univ. Messina, 1903.

Teoria matematica dell' equilibrio dei corpi elastici. Hoepli, Milano. 1904.

Per il quarantesimo d' insegnamento di G. Garbieri. B. M., 3, 1904; P. M., (3), 2, 1904.

Le formole di S. Venant per le deformazioni finite. C. M. P., t. 19, 1905.

Notizie sul «Discorso matematico» e sulla vita di G. Mozzi. B. B. S., 8, 1905.

Meccanica razionale. I — Cinematica e statica: II — Dinamica e principi di Idromeccanica. Hoepli, Milano, 1905.

Sul teorema della composizione delle rotazioni istantanee. Appunti per la storia della Matematica nel secolo XVIII. B. B. S., 9, 1906.

Sugli integrali delle equazioni dell' elettrodinamica. R. A. L., (5), 15, 1906.

La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica matematica. R.A.L., (5). 16, 1907.

David Besso. Periodico di Matematica, 22, 1907.

Per l' unificazione delle notazioni vettoriali. In coll. col prof. Burali Forti. I, 23, 1907; II, III — C. M. P., 24, 1907.

Progressi e sviluppi della teoria matematica dell' elasticità in Italia (1870 1907), con un saggio di bibliografia italiana. N. C., (5), 14, 1907.

Per l' unificazione delle notazioni vettoriali. In coll. col prof. Burali Forti. IV, C. M. P., 25, 1908; V, 26, 1908.

Notations rationnelles pour le système vectoriel minimum. Torino, 1908.

La théorie des equations intégrales et ses applications à la Physique-mathématique. Annales de la Fac. de Toulouse, (2), 10, 1908.

Brevi cenni sulla vita e sulle opere di Francesco Siacci. B. B. S., 11, 1908; Annuario Univ. Napoli, 1907-1908.

I recenti concorsi generali di matematica nelle scuole secondarie. Nuovi Doveri, Palermo, 2, 1908.

Sul moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso. R. A. L. (5), 17, 1908.

Alcune osservazioni sull'equazione delle membrane vibranti. R. A. N., (3), 15, 1909.

Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla Fisica matematica. In collab. col prof. Burali Forti. Bologna, Zanichelli, 1909.

Omografie vettoriali con applicazioni alla derivata rispetto ad un punto ed alla fisica matematica. In collab. col prof. Burali Forti. Torino, Petrini, 1909.

Per l' unificazione delle notazioni vettoriali. Atti IV Congresso dei nat., Roma. 1909.

Un trattato inedito di Meccanica di Vincenzo de Filippis anteriore alla Mecanique analytique di Lagrange. Atti IV Congresso dei nat., Roma, 1909.

Notations rationnelles pour le systeme vectoriel. Réponse a M. M. Combescure, Timerding e Wilson. E. M., 11, 1909.

In memoria di Giovanni Vailati. B. M., 8, 1909.

Notations notionnelles pour le systeme vectoriel. Réponse a M. M. Carvallo, C. G. Knott e A. Macfarlane. E. M., 12, 1910.

Applicazioni delle omografie vettoriali alla teoria dell' elasticità. R.A.N., (3), 16, 1910.

Momenti d' inerzia ed impulso nella meccanica dei sistemi rigidi. R.A.N., (3), 16, 1910.

Elements de calcul vectoriel avec des nombreuses applications à la geometrie, à la mécanique et à la physique mathematique. In coll. col prof. Burali Forti. Trad. S. Lattes. Paris, Hermann, 1910.

Sull'equazione della propagazione del calore nei mezzi cristallini. R.A.N. (3), 17, 1911.

Notations nationnelles pour le systeme vectoriel. Réponse a propos d' un articlo de M Wilson. E. M., 13, 1911.

Theoretische Mechanik. Trad. di M. E Timerding. Leipzig, Teubner, I-II, 1911-12.

Une demonstration vectorielle du theoreme de Dupin. E. M., 14, 1912.

Sur les diads et les dyadies de Gibbs. In coll. col prof. Burali Forti. E.M 14, 1912.

Sulle equazioni dell' elettrodinamica. I-II-III, R. A. N., (3), 18, 1912.

Le curve del vertice di un giroscopio poligonale di Gruey, R. A. N., (3), 18, 1912.

Commemorazione di Michele Rinonapoli. A. P. N., (2), 1912.

A proposito dell' articolo di G. Agaglia: I quaternioni. In coll. col prof. Burali Forti. B. M., 10-11, 1912.

Analyse vectorielle générale. I. *Transformations lineaines;* II. *Applications à la Mécanique et à la Phisique.* In coll. col prof. Burali Forti. Trad. di P. Baridon. Pavia, Mattei, 1912.

Rapporto sulla Memoria del Dr. R. Giacomelli: Un contemporaneo di Galileo, Giuseppe Rollo. R. A N., (3), 18, 1912.

Rapporto sulla Nota del Dr. A. Palomby: Sulla funzione di dissipazione nel moto dei fluidi viscosi. R. A. N., (3), 18, 1912.

Una estensione della teoria del potenziale e sue applicazioni. R. A. N., (3), 19, 1913.

Su alcune questioni relative alle trasformazioni di Lorentz. I-II, R.A.L., (5), 22, 1913,

Alla memoria di Guglielmo Licopoli. B. M., 12, 1913.

Le recenti ricerche di K. Sundmann sul problema matematico dei tre corpi. G. M. B., (3), 5, 1914.

Le curve del vertice di un giroscopio e le curve risultanti dalla composizione di due moti pendolari, G. M. B., (3), 5, 1914.

Sulle omografie vettoriali e le loro applicazioni, S. M. R., 1, 1914.

Les transformations de Lorentz et les equations de l' electrodynamique. Annales de la Fac. de Toulouse, (5), 4, 1914.

Lezioni di Meccanica razionale. Litografie, Napoli, 1911.

Lezioni di Meccanica razionale. Litografie, 2ª edizione, Napoli, 1914.

Il problema dei tre corpi da Newton ai nostri giorni. A. A. N., (2), t. 16, 1915; N. C., (6), 9, 1915.

Sul prodotto e sulla somma dei seni e coseni degli angoli di un triangolo. B.M., 14, 1915.

Sui problemi di meccanica con due gradi di libertà che ammettono un integrale quadratico rispetto alle componenti di velocità. R. A. N, (3), 21, 1915.

Sulla formola fondamentale de cinematica dei sistemi rigidi. G. M. B., (3), 7, 1916.

Pierre Duhem. G. M. B., (3), 7, 1916; R. A. N., (3), 22, 1916.

Luciano Orlando. B. B. S., 1916.

Su alcuni operatori superficiali. R. A. L., (5), 26, 1917.

Meccanica razionale. I e II, 2ª edizione, Milano, Hoepli, 1917

Alberto Pascal. G. M. B., (3), 9, 1918.

Su di un teorema di Pietro Paoli. B. M., 15, 1918.

Il problema dei tre corpi da Newton ai nostri giorni. Milano, Hoepli, 1918.

La teoria della relatività in senso stretto. S. M. R., 5, 1919.

I fondamenti analitici della teoria generale della relatività e le equazioni del campo gravitazionale. S. M. R., 5, 1919.

Il problema dei tre corpi. Sc., 26, 1919.

Una semplice dimostrazione del volume della sfera. B. M., 16, 1919.

Lo sviluppo della meccanica fino ai discepoli di Galileo. M. A. L., (5), 13, 1919.

Relazione sulla Nota del Dr. Trapani: Calcolo del moto medio asintotico del nodo lunare. R. A. N., (3), 25, 1919.

Luigi Pinto. R. A. N., (3), 26, 1920.

Corso di matematica pel 2° biennio degli Istituti tecnici; I, Algebra. Napoli, Perrella, 1920.

Relazione sulla Nota del Prof. F. Amodeo: Le ricerche di un matematico napoletano del settecento su alcuni teoremi di Archimede. R. A. N., (3), 26, 1920.

Relazione sulla Nota del Prof. G. Vacca: Piero della Francesca nella storia dell' Algebra e i suoi tentativi di dimostrazione di due teoremi di Archimede. R. A. N., (3), 26, 1920.

Corso di matematica pel 2° biennio degli Istituti tecnici. In coll. col prof. Burali Forti. Napoli, Perrella, 1921.

Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica ed alla fisica matematica. In coll. col prof. Burali Forti. 2ª edizione, Zanichelli, Bologna, 1921.

Relatività. Messina, Principato, 1921.

Materiale didattico ed esperienze nell' insegnamento. G. M. B., (3), 13, 1922; P. M. (4), 2, 1922.

Il mondo degli atomi. P. M., (4), 2, 1922.

Uno sguardo sintetico alla teoria speciale e generale della relatività. Esercitaz. mat. Catania, 2, 1912.

Orazio Tedone. Esercitaz. mat., Catania, 2, 1922.

Meccanica razionale. I-II, 3ª edizione, Milano, Hoepli, 1922.

La spiegazione dell' accelerazione del perielio di Mercurio secondo la teoria generale della relatività. S. M. R., 6, 1922.

La statica e l' insegnamento relativo. Relazione al Congresso didattico di Meccanica. Pubb. Scuola Mag. R. Ist. Naz. di ins. prof., Roma, 1922.

Relatività. 2ª edizione, Messina, Principato, 1923.

Algebra pei Licei Scientifici. Napoli, Albrighi e Segati, 1923.

La relatività ristretta. I parte. Suo punto di partenza sperimentale. Sc., 35, 1924.

La relatività ristretta. II parte. Modificazioni che essa apporta ai concetti di spazio e di tempo. Sc. 35, 1924.

La prima parte del Codice Arundel 263 del British Museum, R. A. N., (3), 30, 1924.

Relatività speciale. Sua origine e sviluppo. L' Ingegneria. 3, 1924.

Mario Cermenati. R. A. N., (3), 30, 1924.

Calcolo vettoriale omografico, tensoriale e meccanica dei corpi rigidi. Enciclop. Hütte. 2ª edizione italiana, 1925.

Profili di maestri: Corrado Ciamberlini. B. M., (n. s.). 4, 1925.

Fra relativisti e antirelativisti. Atti 5° Congresso intern. di Filosofia, Napoli, 1925.

Matematica complementare. Litografie. Napoli, 1926.

In memoria di G. Frattini. B. M. n. s., 5, 1926.

Quelques remarques sur la pubblication d' un nouveau manuscript de Leonard de Vinci. Acta math., 49, 1926.

La Meccanica di Leonardo da Vinci. Sc., 40, 1926.

Le invenzioni di Leonardo da Vinci, I. Idraulica ed aviazione. Sc., 41, 1947.

Le invenzioni di Leonardo da Vinci, II. Arte militare, Meccanica pratica. Sc., 41, 1927.

Nel bicentenario di Isacco Newton. (2), 1, 1927.

Leonardo da Vinci nella vita del Rinascimento italiano. R. M. F., (2), 1928; Rassegna Previdentia, 15, 1928.

La prova scritta nel recente concorso di materie scientifiche nelle scuole medie inferiori. Osservazioni di un vecchio esaminatore. B. M. n. s., 7, 1928.

Le ricerche geometrico-meccaniche di Leonardo da Vinci. R. A. L., (6), 9, 1929.

Lo strumento inventato da Leonardo da Vinci per la risoluzione del problema di Alhazen. R. A. N., 35, 1929.

L' Euclides Danicus di Giorgio Mohr. R. A. N., (3), 35, 1929.

Commemorazione di Giuseppe Valentino Boussinesq. R. A. N., (3), 35, 1929.

L' edizione nazionale dei manoscritti e dei disegni di Leonardo da Vinci. N. A. 64, 129.

Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica. Atti Congresso internaz. mat. Bologna, 1929.

Le ricerche geometriche - meccaniche di Leonardo da Vinci. Mem. Soc. It. dei XL, (3), 23, 1929.

La dinamica di Leonardo. Rend. Seminario mat. e fis. Milano, 3, 1929.

I centri di gravità dei corpi nei manoscritti di Leonardo da Vinci. Raccolta Vinciana, 13, 1929.

Elementi di trigonometria ad uso degli Istituti medi superiori e degli istituti industriali. In coll. col prof. Burali Forti. Albrighi e Segati, Roma, 1929.

Analisi vettoriale generale e applicazioni. Trasformazioni lineari. In coll. col prof. Burali Forti. Zanichelli, Bologna, 1929.

D' Alembert. L'opera scientifica. E. I., II, 1929.

Funzioni armoniche. E. I., 4, 1929.

Il calcolo vettoriale nell' insegnamento secondario Atti Congresso intern. mat., Bologna, 1929.

Eugenio Rignano. R. A. N. (3), 36, 1930; (2), 4, 1930.

Scritti scientifici di Francesco Siacci. B. N. n. s., 4, 1930.

Il problema della inserzione di due medie proporzionali. I manoscritti e i disegni di Leonardo da Vinci. I, parte IV, 1930.

Indice dei nomi e delle cose più notevoli del Codice Arundel. In coll. con M. T. Carusi. I manoscritti e i disegni di Leonardo da Vinci, I, parte IV, 1930.

Onorato Nicoletti. In coll. col prof. Cecioni. B. U. M., 9, 1930.

Una recente scoperta sulla geometria degli antichi egizi. R. M. F. 4, 1930.

La dinamica di Leonardo da Vinci. Sc., 47, 1930.

Complementi di algebra e di analisi per i licei scientifici. Soc. Dante Alighieri, Roma 1930.

Sulle recenti pubblicazioni della R. Commissione Vinciana. R. A. N., (3), 26, 1930; R. M. F., (2), 5, 1930.

Leonardo maestro di scienza e di vita. Ann. Istruz. media, 6, 1930.

Guidobaldo del Monte. E. I., 12, 1931.

Su di una recente pubblicazione di G. Boffito e sul compasso di proporzioni di Leonardo da Vinci. R. A. N., 1, 1931.

Domenico Montesano. B. U. M., 10, 1931.

Cesare Burali Forti. B. U. M., 10, 1931.

Commemorazione di Gabriele Torelli. R. A. N, (4), 1; B. U., 11; R. M. F., (2), 6; G. M. B, (3), 23, 1931.

Leonardo inventore. L'inventore italiano, 1, 1931.

Gregorio Fontana. R. M. F. (2), 5, 1931.

L'arte e la guerra navale negli scritti di Leonardo da Vinci. A. I. N, 1930-31.

Metodi per la discussione dei problemi di secondo grado e cenno su quelli di terzo e quarto grado. Enciclop. mat. elementari, 1, p. II, Hoepli, Milano, 1931.

La pubblicazione del Codice Arundel. B. U. M., 10, 1931.

Sullo stato attuale della pubblicazione dei manoscritti di Leonardo da Vinci ed in particolare su quello del codice Arundel. Atti Congresso intern. mat. Bologna, 1928. Zanichelli, Bologna, 1932.

La matematica di quaranta secoli fa. Sc., 51, 1932; Atti XX Riunione, Soc. it. Progr, Scienze.

Le invenzioni di Leonardo da Vinci. Nel volume l'Italia e la Scienza, Firenze, 1932.

Glorie italiane nell'arte e nella scienza del navigare. A. I. N. 1931-32.

Il trecentenario del dialogo di G. Galilei sui due massimi sistemi del Mondo. A. P. N. 62, 1932, R. M. F. (2), 6, 1932.

La Meccanica di Leonardo da Vinci. A. A. N. (2), 19, 1932.

Nel trecentenario del Dialogo di Galileo sui due massimi sistemi del mondo. Discorso inaugurale dell'adunanza solenne della R. Acc. dei Lincei, Rend. dell'adunanze solenni, 4, 1932.

A. Einstein. E. I. 13, 1932.

Galileo Galilei. E. I., 16, 1932.

Le Scienze fisiche e matematiche in Roma. Nel volume « Le scienze fisiche e biologiche in Roma e nel Lazio », Roma, 1933.

La relatività nel suo primo venticinquennio A. I. N. 2, 1933.

Le documentazioni scientifiche e tecniche italiane alla esposizione di Chicago. R. M. F. (2), 7, 1933.

Funzioni potenziali; Problema di Dirichelet, attrazione degli ellissoidi. Funzioni sferiche ed applicazioni. Litografie, Napoli, 1933.

L'opera scientifica di Leonardo da Vinci. E. I. 20, 1934.

Storia della Meccanica. E. I. 22, 1934.

Mariano Iacopo. E. I. 22, 1934.

Mozzi Giulio. E. I. 22, 1934.

Il concorso di materie scientifiche nelle R. Scuole di avviamento professionale. B. M. n. s. 13, 1934.

Il trattato di Leonardo da Vinci sulle trasformazioni dei solidi. A. A. N., (2), 20, 1934.

Giacomo Venezian e l'educazione fisica della gioventù. Nel volume « In memoria di G. Venezian ». Messina, 1934.

Arte e Scienza di Leonardo da Vinci. R. M. F. (2), 9, 1935.

La prova pratica di fisica nei concorsi di matematica e fisica negli Istituti tecnici superiori. R. M. F., (2), 10, 1936.

Potenziale. E. I., 28, 1935.

A. Finzi. B. M. n. s. 14, 1935.

Su due opere poco conosciute di Luca Valerio e G. B. Porta. R. M. F. (2), 10, 1936.

La misura del tempo. Sc. 29, 1936.

Le curve di Lissajous e le curve giroscopiche. Sa., 1936.

Temi di matematica assegnati nei concorsi per le Scuole medie. Svolgimento e relativi richiami teorici. In coll. con la Prof. L. Marzella. Napoli, Rondinella, 1937.

Numeri giganti e numeri pigmei. Sa. 1937.

Fortunose vicende dei manoscritti di Leonardo da Vinci. Sa., 1937.

Come facevano le operazioni i Romani. Sa. 1937.

Sui vari sistemi di numerazione. Sa., 1937.

Studi vinciani. S.I.E.M., Napoli, 1937.

Leonardo lo sapeva. Sa., 1938.

Geometria di seta. Sa , 1938.

La pubblication des oeuvres de Leonardo da Vinci. Sc., 31, 1938.

La R. Commissione vinciana e la pubblicazione dei manoscritti e disegni di Leonardo. N. A., 1938.

Corso di matematica ad uso degli Istituti tecnici commerciali e per geometri. Vol. I. In coll. con la prof. Lena Marzella. Soc. Ed. Dante Alighieri, Roma, 1938.

Nel trecentenario delle due nuove scienze di Galileo Galileo. Sa., 1938.

Autorecensione dei miei studi vinciani. Sa., 1938.

Corso di matematica ad uso degli Istituti tecnici commerciali e per geometri. Vol. II. In coll. con la prof. L. Marzella. Soc. Ed. Dante Alighieri, Roma, 1938.

Leonardo nel paradiso delle scienze matematiche. Leonardo fisico, matematico e astronomo. Leonardo meccanico e ingegnere. I precursori di Leonardo. La Commissione Vinciana e l'Istituto di studi vinciani. Chi era la Gioconda. Rebus e caricature sui disegni di Leonardo. Vinciani d'Italia. Nodi vinciani. Sa., 1938.

Commemorazione di Giovanni De Berardinis. R. A. N., (3), 34, 1938.

Leonardo da Vinci ed il rinnovamento della Meccanica nel secolo XV. Annali Lavori pubblici, 1938.

Leonardo matematico. L'Ingegnere 1938.

Temi di matematica assegnati nei concorsi per le scuole medie. Vol. II. In coll con la prof. L. Marzella. Rondinella, Napoli, 1939.

Nel trecentenario dei Discorsi sopra due nuove scienze di Galileo Galilei, Sc. 32, 1939.

Leonardo artista scienziato. Hoepli, Milano, 1939.

Le confessioni di Marcolongo. Perchè ho scritto per Hoepli, Leonardo artista scienziato Sa., 1939.

Indici del Codice atlantico (per materie ed alfabetico) compilati da GUIDO SEMENZA e pubblicati da R. M. Hoepli, Milano, 1939.

Discorso tenuto alla Radio in occasione della Mostra di Leonardo e delle invenzioni il 17 maggio 1939. Riv. di Cultura marinara, 1939.

Temi di matematica assegnati nei concorsi per le R. Scuole medie, Vol. III. In coll. con la prof. L. MARZELLA. Rondinella, Napoli, 1941.

Il dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. Sa. 1941.

La scoperta delle macchie solari. Sa., 1941.

Il pendolo e la sua applicazione all' orologio. Sa., 1941.

Galileo, la prima Accademia dei Lincei ed il carteggio linceo. Sa., 1941.

Il giorno della nascita di Galileo. Sa., 1941.

Le nuove scienze e la meccanica del secol novo. Sa., 1941.

Commemorazione di Galileo. R. M. F., (2), 17, 1942.

Galileo Galilei. Civiltà, 1942.

La meccanica di Galileo. Conferenza tenuta presso l' Università cattolica, Milano, 1942.

Esame critico di: V. Harzanis, Galileo Galilei. Sa., 1942.

La matematica nell' insegnamento tecnico. Sa., 1942.

Galileo Galilei nel trecentenario della morte. Sa, 1943.

Galileo in Roma. Sa., 1943

Confidenze sui miei studi vinciani. Scienza e Tecnica, 1943.

Leonardo artista e scienziato. 2. ediz., Hoepli, Milano, 1943.

Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n nell'S_r proiettivo complesso

Nota III del socio **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 3 gennaio 1948)

Sunto. — S'introduce il concetto generale di equivalenza ed il concetto di equivalenza razionale nel campo delle ipersuperficie algebriche di indice di algebricità qualunque, dell'S_r proiettivo complesso. S'introduce inoltre la coincidenza in media.

24. *Le classi* $\{W_{r-1}\}$ *determinate dalla coincidenza ideale.*

Date in S_r due ipersuperficie algebriche di indice di algebricità n ed n^*:

$$W_{r-1} = [I_{r-1}, N(X)] \quad , \quad W^*_{r-1} = [I^*_{r-1}, N^*(X)]$$

indicando con $M(X)$ e $M^*(X)$ la multiplicità di W_{r-1} e di W^*_{r-1} in un punto X, cioè posto (n° 22)

$$M(X) = \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{n} \quad , \quad M^*(X) = \frac{\lambda^*_1 + \ldots + \lambda^*_{n^*}}{n^*} \, ,$$

essendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e $\lambda^*_1, \ldots, \lambda^*_{n^*}$ i valori di $N(X)$ e $N^*(X)$ nel punto X, (cioè le *sottomultiplicità* di W_{r-1} e W^*_{r-1} in X), le due funzioni *ad un valore*, $M(X)$ e $M(X)$ si dicono le *funzioni medie* di W_{r-1} e W^*_{r-1} rispettivamente. Le due ipersuperficie W_{r-1} e W^*_{r-1} si diranno *idealmente coincidenti* se è

$$I_{r-1} = I^*_{r-1} \qquad \text{e} \qquad M(X) = M^*(X).$$

La *coincidenza ideale* gode della proprietà transitiva e quindi le ipersuperficie di S_r di indice di algebricità qualunque si possono distribuire in classi, che indicheremo con $\{W_{r-1}\}$, di ipersuperficie idealmente coincidenti fra di loro. Le ipersuperficie di una stessa classe sono tutte dello stesso ordine. Per tali classi si possono introdurre le operazioni di somma, differenza e di prodotto o quoto per un intero relativo già introdotte in relazione alla *coincidenza assoluta* (n^i 7, 10, 11 e 13).

Si dimostra che in ogni classe $\{W_{r-1}\}$ di *ipersuperficie idealmente coin-*

cidenti esistono sempre infinite ipersuperficie ideali e quindi ogni classe $\{W_{r-1}\}$ si può considerare determinata da una ipersuperficie W_{r-1} del tipo ideale. Ne segue che quando si considera la coincidenza ideale, anzichè quella assoluta, se si considerano soltanto le W_{r-1} del tipo ideale, non si viene meno alla generalità. Un vantaggio della coincidenza ideale sulla coincidenza assoluta è che nel calcolo delle classi $\{W_{r-1}\}$ *le operazioni di prodotto e quoto per uno stesso intero relativo si elidono* [Si veda in proposito il n° 16].

Nota. Anche in corrispondenza alla coincidenza funzionale (n° 5) si ha una distribuzione in classi, le classi $[W_{r-1}]$ delle ipersuperficie W_{r-1}. Ma per il calcolo di queste classi $[W_{r-1}]$ non si ha il vantaggio di cui sopra.

25. *Concetto generale di equivalenza nel campo delle ipersuperficie algebriche di indice qualunque. Equivalenze normali. La coincidenza in media.*

Sia σ un insieme di ipersuperficie W_{r-1}, *chiuso rispetto all'operazione di somma.* Diciamo *equivalenti rispetto a* σ due ipersuperficie W_{r-1} e W'_{r-1} se sono assolutamente coincidenti o si possono ridurre tali sommando ad una o ad entrambe delle ipersuperficie contenute in σ. In altri termini la *equivalenza rispetto all'insieme* σ si può considerare come un tipo di *coincidenza* fra ipersuperficie quando le W_{r-1} si considerano *definite a meno di ipersuperficie additive contenute in* σ.

L'equivalenza rispetto a σ gode della proprietà transitiva e quindi è atta a determinare una distribuzione in classi, che indicheremo con (W_{r-1}), delle ipersuperficie W_{r-1}, mettendo in una stessa classe (W'_{r-1}) le ipersuperficie equivalenti ad una data ipersuperficie W'_{r-1} e quindi fra di loro. L'insieme σ costituisce una di tali classi e si dirà la *classe zero* perchè, introdotta fra tali classi l'operazione di somma, la classe σ sommata ad una classe (W_{r-1}) qualunque dà la stessa classe (W_{r-1}). La possibilità di introdurre l'operazione di somma fra le classi (W_{r-1}) determinate dall'insieme σ risiede nell'ipotesi che σ sia chiuso rispetto all'operazione di somma.

Nel caso particolare che l'insieme σ sia anche *autopposto*, cioè contiene l'opposta $-W_{r-1}$ di ogni sua ipersuperficie W_{r-1}, mentre W varia in una classe (W), la sua opposta varia nella classe $(-W)$ classe che si dirà l'opposta di (W). La somma di una classe con l'opposta di un'altra si dirà la differenza della prima con la seconda.

Se inoltre l'insieme σ è chiuso rispetto all'operazione di prodotto per un intero relativo o di quoto per un intero relativo non nullo, tali operazioni si possono introdurre pure nel calcolo delle classi (W_{r-1}) determinate da σ. Se infine si suppone che l'insieme σ contenga tutte le ipersuperficie *a funzione nulla* N_{r-1} e tutte le ipersuperficie H_{r-1} del tipo $W_{r-1} - W_{r-1}$

(che si dicono *a funzione seminulla*), l'insieme σ si dirà un *insieme normale.*

L'equivalenza definita nel campo delle ipersuperficie W_{r-1} di indice qualunque determinata da un insieme normale si dirà *normale.* Si ha l'importante proprietà:

Nel calcolo delle classi (W_{r-1}) determinata da una *equivalenza normale* si può introdurre anche l'operazione di prodotto e quoto per un *razionale* relativo ed inoltre *vale il principio del trasporto dei termini.* Tre importanti tipi di equivalenza normale sono determinati dai seguenti insiemi normali:

a) L'insieme normale μ costituito da tutte le ipersuperficie a funzione nulla N_{r-1} e a funzione seminulla H_{r-1} (cioè del tipo $W_{r-1} - W_{r-1}$) e dalle ipersuperficie che si ottengono dalle N_{r-1} e H_{r-1} con un numero finito di operazioni rispetto alle quali l'insieme normale è chiuso. Tale insieme normale è il *minimo* insieme *normale*, perchè ogni insieme normale contiene μ. L'equivalenza normale determinata da μ si dirà *equivalenza normale minima.*

b) L'insieme delle *ipersuperficie autopposte* è pure un insieme normale. L'equivalenza normale determinata da questo insieme viene chiamata *equivalenza relativa.*

c) L'insieme delle ipersuperficie a funzione media $M(X)$ nulla è pure un insieme normale. L'equivalenza normale determinata da tale insieme viene chiamata *equivalenza ideale.*

Risulta che due ipersuperficie risultano equivalenti quando e solo quando hanno la stessa funzione media, cioè quando in ogni punto X (pur avendo sottomultiplicità diverse) risultano con la stessa multiplicità. Per tale fatto due ipersuperficie idealmente equivalenti si diranno pure *coincidenti in media.* Sicchè il considerare la coincidenza in media, anzichè quella assoluta, equivale a considerare le ipersuperficie definite a meno di ipersuperficie additive a funzione media nulla.

Si verifica che le tre equivalenze normali sopra considerate:

a) Equivalenza normale minima

b) Equivalenza relativa

c) Equivalenza ideale

sono effettivamente distinte nel campo di tutte le ipersuperficie algebriche di S_r con l'indice di algebricità qualunque. Però se si considera solo il campo delle ipersuperficie algebriche *ideali*, le tre suddette equivalenze subordinano in questo campo *un unico tipo di equivalenza* quella determinata dall'insieme di tutte le ipersuperficie *ideali* a funzione media $M(X)$ nulla, (e quindi a funzione $N(X)$ a valori nulli). Il tipo di coincidenza determinato da tale equivalenza si dirà ancora *coincidenza in media.*

Si osservi che essendo fra le ipersuperficie ideali quelle a funzione nulla *tutte e sole* le ipersuperficie del tipo $\frac{\lambda}{n}(V_{r-1} - V_{r-1})$ con V_{r-1} *iper-*

superficie ordinaria di S_r, risulta che il considerare nel campo delle ipersuperficie ideali la coincidenza in media, anzichè quella assoluta, equivale a considerare le ipersuperficie ideali definite a meno di ipersuperficie additive del tipo $\frac{1}{n}(V_{r-1} - V_{r-1})$.

Si osservi, infine che, se si considera solo il campo delle ipersuperficie virtuali, la coincidenza in media non si distingue più dalla *coincidenza funzionale* (n° 5) perchè per $n = 1$ è sempre $N(X) = M(X)$. Ne segue che nel campo delle ipersuperficie virtuali il considerare la coincidenza funzionale (o in media) equivale a considerare le ipersuperficie definite a meno di ipersuperficie additive del tipo $V_{r-1} - V_{r-1}$. È questo il tipo di coincidenza usato dal Severi nel campo virtuale [1]).

Nel campo ideale introdotte le ipersuperficie ideali, col Severi, formalmente come *simbolo* costituito proponendo una unità frazionaria al simbolo di una ipersuperficie [vedi nota del n° 18] la coincidenza che usa il Severi viene ad essere quella in media perchè si vengono a trascurare le ipersuperficie ideali del tipo $\frac{1}{n}(V_{r-1} - V_{r-1})$ con V_{r-1} ipersuperficie algebrica ordinaria.

26. *Sistemi monolineari di* W_{r-1}.

Sia data una W_{r-1} di indice di algebricità n, determinata nell'S_r proiettivo complesso dalla funzione $y(x_j)$ definita dalla equazione

$$\varphi_0(x_j)\, y^n + \varphi_1(x_j)\, y^{n-1} + \ldots\ldots + \varphi_n(x_j) = 0. \qquad [1]$$

Consideriamo il caso in cui φ_0 e φ_n siano date da:

$$\varphi_0(x_j) = [\lambda_0 f_1(x_j) + \ldots\ldots + \lambda_h f_h(x_j)]^p$$
$$\varphi_n(x_j) = [\lambda_0 f_1(x_j) + \ldots\ldots + \lambda_h f_h(x_j)]^q$$

con $f_i(x_j)$ forme dello stesso grado m, linearmente indipendenti, e p e q interi assoluti non entrambi nulli, convenendo di porre

$$[\lambda_0 f(x_j) + \ldots\ldots + \lambda_h f_h(x_j)]^0 = 1$$

per le λ_i non tutte nulle e le x_j non tutte nulle.

Al variare delle λ_i la W_{r-1} descrive un sistema che si dirà *sistema monolineare* ∞^k *di esponenti* p e q, anche se, inoltre, *(nel caso non ideale)* ogni $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$, che non sia una costante, (nulla o non nulla) sia una com-

[1]) F. Severi Serie, *Sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* [Edizione Cremonese, Roma].

binazione lineare secondo i coefficienti $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ di k forme di gradi $m_0, \ldots, m_{k-1}$ rispettivamente.

Un sistema monolineare gode delle seguenti proprietà:

1.° *Si può stabilire una corrispondenza biunivoca senza eccezioni fra le ipersuperficie* W_{r-1} *del sistema e un* S_k *proiettivo complesso.*

2.° *Per* k *punti generici dell'* S_r *ambiente passa il sostegno di una ed una sola ipersuperficie del sistema.* [Nel caso ideale la [1] ci dà:

$$y = -[\lambda_0 f_0(x_j) + \ldots + \lambda_k f_k(x_j)]^{\frac{1}{s}} \ (s = q - p)$$

ed il sistema monolineare si dirà di *esponente* s, con s intero relativo].

Le ipersuperficie di un sistema monolineare sono tutte dello stesso ordine

$$\nu = \frac{m(q-p)}{n}.$$

Si dimostra che:

Condizioni necessarie e sufficienti affinchè due ipersuperficie W_{r-1} *e* W'_{r-1} *distinte, appartengano ad uno stesso sistema monolineare sono:*

1.° *Siano* W_{r-1} *e* W'_{r-1} *dello stesso ordine*

2.° *Siano* W_{r-1} *e* W'_{r-1} *determinabili da due* (n + 1)ple (n.° 20) *di ipersuperficie degli stessi ordini* $(m_0, \ldots, m_n)$

$$|\Gamma^0, \ldots, \Gamma^n| \qquad |\Gamma'^0, \ldots, \Gamma'^n|.$$

3.° *Devono esistere due ipersuperficie ordinarie* V_{r-1} *e* V'_{r-1} *dello stesso ordine* m *per le quali sia*

$$\Gamma^{(0)} = p\, V_{r-1} \qquad \Gamma^{(m)} = q\, V_{r-1}$$
$$\Gamma'^{(0)} = p\, V'_{r-1} \qquad \Gamma'^{(m)} = q\, V'_{r-1}$$

con p *e* q *interi assoluti non entrambi nulli e ponendo* $0 \cdot V_{r-1} = \Omega$ (ipersuperficie vuota n° 20). Si ha inoltre che: *quando le proprietà 1ª, 2ª e 3ª sono soddisfatte, le due ipersuperficie* W_{r-1} *e* W'_{r-1} *appartengono ad un sistema monolineare* ∞^1 *da esse determinato.*

Si ha inoltre che: *ogni sistema monolineare* ∞^k *di ipersuperficie* W_{r-1} *si può considerare determinato da* k + 1 *ipersuperficie qualunque ad esso appartenenti purchè monolinearmente indipendenti, cioè non appartenenti ad un sistema monolineare* ∞^{k-1}].

27. *Sistemi t-lineari.*

Dati t sistemi monolineari, si dirà sistema t-lineare, loro *somma*, il sistema descritto da:

$$W_{r-1} = W_{r-1}^{(1)} + \ldots + W_{r-1}^{(t)}$$

se $W^{(1)}_{r-1}, \ldots, W^{(t)}_{r-1}$ descrivono i t sistemi monolineari dati.

Fra i sistemi t-lineari di W_{r-1} ideali si diranno *normali*:

a) *I sistemi monolineari di esponenti* 0, 1, — 1.

b) *I sistemi 2-lineari di esponenti* (0, 1), (0, — 1), (1, — 1).

c) *Il sistema 3-lineare di esponenti* (0, 1, — 1).

Si dimostra che: *Ogni sistema t-lineare di* W_{r-1} *ideali è contenuto in un sistema normale.*

28. *Equivalenza razionale di due* W_{r-1}.

Due ipersuperficie W_{r-1} *e* W'_{r-1} *si diranno razionalmente equivalenti se ammettono due ipersuperficie ad esse idealmente equivalenti (o ciò che è lo stesso coincidenti in media) appartenenti ad uno stesso sistema t-lineare.*

Si dimostra il teorema fondamentale:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due ipersuperficie W_{r-1} *e* W'_{r-1} *siano razionalmente equivalenti è che siano dello stesso ordine.*

Nota: Nel campo delle ipersuperficie ordinarie *l'equivalenza razionale* coincide con *l'equivalenza lineare* cioè l'appartenenza delle due ipersuperfici ad uno stesso sistema lineare. Vedremo come analoghe osservazioni si fanno nello studio della *geometria algebrica generale (cioè di indice di algebricità qualunque), sopra una curva o varietà algebrica ordinaria irriducibile o somma di curve o varietà algebriche irriducibili distinte.*

Le variazioni di latitudine ed il movimento del Polo di rotazione terrestre negli anni 1945 e 1946

Nota del socio ordinario **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 3 gennaio 1948)

Sunto. — Con i procedimenti abituali ed utilizzando i risultati delle osservazioni fatte durante gli anni 1945 e 1946 nelle Stazioni astronomiche internazionali esistenti sul parallelo boreale di 39°8′ di latitudine vennero ricavate le coordinate istantanee del Polo di rotazione terrestre, e la conseguente traiettoria descritta, che appare in un periodo di massimo sviluppo, quale si ebbe solo fra il 1909 ed il 1917.

Si chiude con i risultati contenuti in questa nota il lungo e perturbato periodo bellico e postbellico, e mentre spero mi sia dato fra poco riprendere il normale ritmo dei tempi di pace e pubblicare i dati relativi all'ultimo

decorso anno 1947, per il quale il ciclo osservativo terminerà appena la sera del 5 gennaio 1948, mi auguro che con la normale instaurazione dei rapporti fra i diversi paesi, abbiano a cessare tutte le difficoltà, che ostacolano ancora oggi queste particolari ricerche, e nuovamente si possa contare su una vasta cooperazione atta ad assicurare un servizio permanente efficiente atto a chiarire i non molti punti dubbi, che ancora sussistono negli spostamenti del Polo di rotazione terrestre.

I due anni 1945 e 46 sono stati ben poco fortunati per il nostro servizio, chè se anche durante il loro corso ebbero termine le operazioni di guerra, si sono continuate non di meno a risentire in modo diverso le conseguenze. La Stazione di Carloforte, chiusa nell'aprile 1943, per una serie di difficoltà, quasi esclusivamente di natura amministrativa, non potè riprendere la sua attività, che nel giugno 1946, e tale ripresa non potè avvenire, che in maniera incompleta, non essendo stato possibile destinare ad essa un personale adeguato e sufficiente per attendere ai suoi compiti. È ben vero che regolari osservazioni di latitudine sono state eseguite con metodo e strumento simile fin dall'estate 1943 all'Osservatorio di Pino Torinese, posto su per giù sullo stesso meridiano di Carloforte, e che continuate senza interruzione fino alla fine dell'anno 1946 permetteranno un prezioso allacciamento, e sperabilmente colmeranno nella elaborazione finale almeno in parte la lacuna dolorosa dei tre anni di inattività di Carloforte. Ma ciò si potrà fare solo in avvenire, e per intanto ci si è dovuto accontentare dei dati forniti dalle altre stazioni. E sfortunatamente anche per alcune di esse avemmo a dover deplorare inconvenienti. La prima e più dolorosa per il servizio è stata la infermità, che ha colpito l'astronomo H. G. Wrochlage, che dopo circa 24 anni di esemplare attività dovette abbandonare l'Osservatorio di Ukiah alla fine di agosto 1946. Divideva col prof. H. Kimura il merito di aver dedicato oltre un ventennio alle osservazioni di latitudine, conseguendo nell'esecuzione un'abilità eccezionale, e favorito anche dalle eccezionali condizioni climatiche offerte dalla località forniva mensilmente serie di osservazioni, che per la loro esattezza e completezza risultavano del più alto valore scientifico. Questo improvviso e forzato abbandono del signor Wrochlage ci ha privati per tre mesi (settembre-novembre 1946) dei risultati della Stazione di Ukiah, e questo proprio quando con la ripresa dell'attività di Carloforte si poteva sperare di riavere nuovamente in piena attività continuativa almeno le stazioni dell'emisfero boreale. Ho detto si « poteva sperare », e veramente si tratta di una speranza, chè dai primi di aprile 1946 siamo privi di ogni notizia della Stazione russa di Kitab, tanto che durante l'anno 1946 ci siamo trovati una volta per due mesi, e una per tre a non poter disporre che delle osservazioni di sole tre stazioni (nell'aprile e maggio di Mizusawa, Gaithersburg ed Ukiah, ed in settembre, ottobre e novembre di Mizusawa, Carloforte e Gaithersburg). Se si riflette ora alla distribuzione in longitudine di queste due terne di stazioni, e si ricorda che ogni valore

della differenza della latitudine media mensile in confronto alla media di una stazione è legato a tre incognite, le coordinate x ed y del Polo istantaneo, e la incognita z, che alla sua volta congloba in se oltre alla correzione residua delle declinazioni stellari, anche il complesso degli errori residui di carattere sistematico ed accidentale, il « termine z » di carattere generale e quello locale, ben si comprende come avendo a disposizione unicamente tre valori non si possano ottenere che valori di relativa attendibilità, e particolarmente quando ancora avviene che il numero delle coppie osservate nel periodo risulti particolarmente esiguo.

È a questo, che con ogni probabilità, si devono attribuire gli accordi meno buoni presentati, in questa prima deduzione, dai risultati del 1946; ma poichè è da ritenere che a Kitab il servizio di osservazioni non sia stato sospeso, dato il vivo interesse sempre manifestato dagli astronomi russi per queste ricerche, spero e mi auguro che attraverso gli Enti ed Associazioni che si propongono l'intensificazione dei rapporti culturali fra i paesi dell'URSS e l'Italia, si riesca a poter far arrivare a noi i libretti contenenti i risultati delle osservazioni fatte colà, e fin d'ora mi propongo di riprendere il calcolo della Polodia per il 1946 appena potrò disporre di questo contributo di così notevole valore per le nostre ricerche.

Nessun cambiamento si è verificato nelle stazioni di Mizusawa e di Gaithersburg; a Carloforte dopo un breve periodo in cui hanno osservato i signori prof. Tito Nicolini e dott. Mario Castellano, è rimasto poi dall'ottobre 1946 solo quest'ultimo, e ad Ukiah, dopo un breve periodo preparatorio, al principio di dicembre 1946 ha iniziato il servizio il signor L. F. Caovette. Nelle riduzioni delle osservazioni non si sono introdotte modifiche in confronto agli anni precedenti, onde i risultati contenuti in questa nota devono considerarsi quale un tutto unico con quelli delle note precedenti comprendenti i risultati degli anni 1941 e 42, e del 1943 e 44.

Nella tabella che segue si trovano come di consueto i dati statistici delle osservazioni eseguite nelle stazioni durante il corso di questi due anni: in complesso se si tien conto del ritardo di ben 5 mesi, che presenta nel 1946 l'inizio del lavoro a Carloforte, e la mancanza delle osservazioni ad Ukiah nei tre mesi già ricordati, si avrebbero nei due anni risultati più favorevoli di quelli avuti nella media degli ultimi 10 anni, indicati nelle terze colonne di ciascuno dei tre gruppi di colonne della tabella.

Tabella I.

STAZIONE	Osservazioni: sera			Osservazioni: matt.			T O T A L E		
	1945	1946	Media	1945	1946	Media	1945	1946	Media
Mizusawa	624	703	686	554	636	612	1178	1339	1298
Kitab [1])	808	170	780	741	145	728	1549	315	1508
Carloforte [2])	—	467	869	—	443	729	—	910	1598
Gaithersburg	553	727	691	500	831	611	1053	1558	1302
Ukiah [3])	794	631	684	747	590	656	1541	1221	1340
Totale	2779	2698	3710	2542	2645	3336	5321	5343	7046

Nei due quadri, che seguono, si trovano i $\Delta\varphi$ $\varphi - \varphi_0$, ossia le differenze fra le latitudini ottenute dalle osservazioni fatte in ciascuna stazione in ciascun mese e quella media, tenendo distinti i valori ricavati dalle coppie del gruppo serotino da quelle del gruppo del mattino. Accanto al valore delle singole differenze è pure dato il numero delle coppie di stelle osservate e considerate, avvertendo a questo proposito che al solito non si è tenuto conto di quelle coppie, in cui per una delle due stelle si era potuto fare col filo mobile del micrometro una sola puntata (in luogo delle quattro), e che si è abbandonata anche qualche rara coppia, che portava a risultati eccessivamente discordanti, senza che vi fosse possibilità di trovare nel libretto delle osservazioni un errore di scritturazione identificabile con sicurezza. Nell'ultima colonna dei quadri è indicato il numero del gruppo osservato in quel periodo, e dal quale si sono ricavati quei valori.

Le coordinate x ed y del Polo, distintamente per le osservazioni dei due gruppi sono state calcolate al modo abituale, ricavando nel tempo stesso pure il valore della terza incognita z, che include come parte essenziale l'errore delle declinazione adottate per le stelle di ciascun gruppo. I valori ottenuti sono riportati nel seguente quadro numerico; per le coordinate del Polo si hanno nei due primi gruppi di colonne, in quelle intestate con x_s ed y_s, e rispettivamente x_m ed y_m, i valori dedotti dalle osservazioni del gruppo serale e di quello del mattino, mentre le colonne intestate con X ed Y contengono le medie ricavate dai due valori serale e mattutino, e valgono per l'epoca indicata nella prima colonna. In maniera analoga sono indicati i valori della terza incognita z; ma poichè questa più che dipendere dal-

[1]) Nel 1946 unicamente i 3 primi mesi.

[2]) Nel 1946 solamente negli ultimi 7 mesi.

[3]) Nel 1946 mancano osservazioni nei tre mesi di settembre, ottobre e novembre.

TABELLA II.

Osservazioni della sera

Epoca	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersb.		Ukiah		Gruppo
	Δφ	Oss.	Δφ	Oss.	Δφ	Oss.	Δφ	Oss.	Δφ	Oss.	
1945											
.06	+″.080	65	+″.012	51	—	—	—″.090	36	+″.241	53	IV
.14	+ .033	39	— .204	54	—	—	— .094	42	+ .059	54	V
.22	+ .066	51	— .077	60	—	—	+ .150	48	+ .305	48	VI
.31	— .200	89	— .207	69	—	—	+ .143	71	+ .219	72	VII
.39	— .276	72	— .274	80	—	—	+ .158	65	+ .065	56	VIII
.47	— .461	46	— .269	107	—	—	+ .053	46	— .020	84	IX
.55	— .461	48	— .080	77	—	—	+ .026	37	— .111	102	X
64	— .340	53	+ .108	106	—	—	+ .019	58	— .077	89	XI
.72	— .182	22	+ .281	80	—	—	+ .061	23	— .128	81	XII
.80	— .037	47	+ .398	60	—	—	— .053	66	— .193	80	I
.90	— .065	65	— .068	33	—	—	— .293	33	— .446	30	II
.97	+ .154	27	+ .330	28	—	—	— .190	28	— .109	45	III
1946											
.06	+ .270	47	+ .294	48	—	—	— .068	65	+ .090	69	IV
.14	+ .119	55	— .023	64	—	—	— .254	70	— .064	70	V
.22	+ .212	59	+ .070	58	—	—	+ .008	68	+ .127	51	VI
.30	— .010	92	—	—	—	—	+ .065	42	+ .216	84	VII
.39	— .195	53	—	—	—	—	+ .017	49	+ .076	72	VIII
.48	— .348	69	—	—	—″.280	54	+ .049	35	+ .107	84	IX
.56	— .492	50	—	—	— .096	120	+ .074	57	+ .033	88	X
.64	— .347	64	—	—	+ .073	57	+ .185	76	+ .090	48	XI
.72	— .265	53	—	—	+ .281	84	+ .265	95	—	—	XII
.81	— .210	72	—	—	+ .286	63	+ .188	72	—	—	I
.89	— .252	51	—	—	+ .151	41	— .113	70	—	—	II
.97	— .221	38	—	—	+ .375	48	+ .121	28	+ .020	65	III

Tabella III.

Osservazioni del mattino.

Epoca	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersburg		Ukiah		Gruppo
	Δφ	Oss.	Δφ	Oss	Δφ	Oss.	Δφ	Oss	Δφ	Oss.	
1945											
.06	—".019	59	—".139	52	—	—	—".115	30	+".065	47	V
.14	+ .124	34	+ .037	48	—	—	+ .063	32	+ .337	53	VI
.22	— .040	62	— .160	59	—	—	+ .057	46	+ .297	48	VII
.31	— .114	78	— .311	65	—	—	+ .108	54	+ .190	72	VIII
.40	— .365	65	— .269	60	—	—	+ .130	57	+ .041	53	IX
.48	— .385	37	— .307	102	—	—	+ .200	39	— .043	84	X
.55	— .152	30	— .034	70	—	—	+ .226	17	— .034	102	XI
.64	— .262	42	+ .123	107	—	—	+ .027	52	— .008	80	XII
.72	— .107	18	+ .253	68	—	—	+ .042	23	— .112	75	I
.81	— .156	33	+ .072	60	—	—	— .249	84	— .430	62	II
.89	+ .193	65	+ .473	15	—	—	— .066	38	— .136	27	III
.97	+ .089	31	+ .275	35	—	—	— .026	28	— .050	44	IV
1946											
.06	+ .151	45	+ .012	38	—	—	— .254	65	— .097	63	V
.14	+ .212	37	+ .058	53	—	—	— .052	45	+ .156	60	VI
.22	+ .174	61	— .090	54	—	—	— .022	71	+ .217	41	VII
.31	— .007	73	—	—	—	—	+ .017	51	+ .154	82	VIII
.39	— .238	52	—	—	—	—	+ .048	68	+ 129	66	IX
.48	— .287	65	—	—	—".220	54	+ .096	54	+ .071	85	X
.56	— .365	35	—	—	— .011	113	+ .184	79	+ .165	88	XI
.64	— .297	56	—	—	+ .142	59	+ .324	92	+ .155	48	XII
.72	— .402	56	—	—	+ .146	82	+ .139	106	—		I
.81	— .401	65	—	—	+ .120	60	— .026	79	—	—	II
.89	+ .019	50	—	—	+ .430	37	+ .246	86	—	—	III
.97	— .019	41	—	—	+ .281	38	+ .029	35	— .012	57	IV

l'epoca dell'osservazione, è dovuta alla diversità delle stelle osservate, e quindi alle diverse correzioni delle declinazioni adottate, il confronto deve farsi paragonando quelli ottenuti da osservazioni di identiche stelle, e quindi paragonando il z_s di ciascun mese col z_m del mese precedente. Per questa ragione nella colonna del z_m si è aggiunto sopra la prima linea del quadro il valore ricavato nel dicembre 1944 dal gruppo del mattino. Dei valori così scalati si è dedotta la media indicata nella colonna intestata con Z. Va osservato, che in generale l'accordo fra i due valori che portano alle X, Y, Z è abbastanza buono, ed in particolare per le x ed y, mentre per le z i divari sono alquanto maggiori. Ma non va dimenticato, come già si disse, che in questi ultimi valori si trovano accumulati oltre alle correzioni delle declinazioni, anche errori di diversa natura e quantità variabili nel tempo, e da stazione a stazione, ognuno dei quali può essere di entità non trascurabile. Nella penultima colonna sono aggiunti i valori della media dalle Z ricavate dalle osservazioni del biennio, mentre l'ultima contiene l'analogo valore ricavato dalle osservazioni fatte nel decennio 1935-44. Ove si tenga conto del grado di minor sicurezza che hanno i risultati dell'ultimo anno, tuttavia si può riconoscere un accordo sufficiente per assicurare il valore della correzione delle declinazioni stellari di ciascun gruppo entro limiti molto ristretti. Ed a questo punto conviene ancora non dimenticare, che se i disaccordi delle coordinate istantanee del Polo in questi ultimi anni appaiono talvolta leggermente superiori in confronto al passato, ciò deve attribuirsi alla insufficienza di dati d'osservazione: la mancanza delle osservazioni della stazione di Carloforte, che ha il peso massimo nella determinazione della coordinata x, appare evidente dall'accordo sensibilmente migliore esistente fra i valori serali e mattutini delle y in confronto a quelle delle x, onde la somma importanza per tutto questo studio, che a Carloforte il lavoro di osservazione non subisca mai interruzioni, e che sia fatto con la più grande cura e con la massima precisione. Da ciò un obbligo morale per l'astronomia italiana di provvedere a quel servizio, che se pur sommamente oneroso per le limitate risorse di cui si può disporre, rappresenta un compito a cui non dovrebbe sottrarsi. E poichè ancora vi è notoriamente una grande differenza fra le condizioni climatiche, che regnano a Carloforte nell'inverno e nell'estate, bisogna che a Carloforte si ponga la massima cura a non perdere, durante i mesi invernali, la possibilità di raccogliere appena possibile anche l'osservazione isolata di qualche coppia, ciò che potrà essere facilmente ottenuto, se ritorneranno ad essere sempre disponibili come in passato due osservatori, per alternarsi di giorno in giorno nel turno del lavoro.

TABELLA IV.

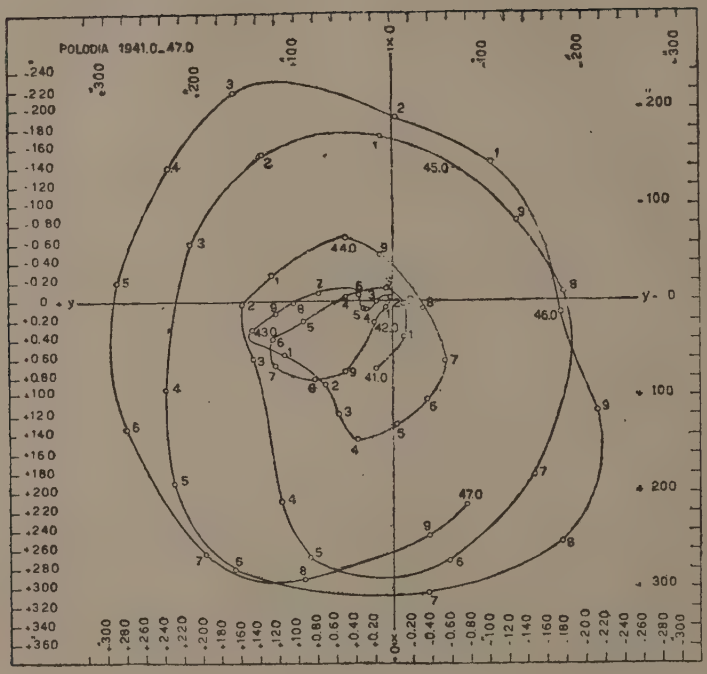
Epoca	x_c	x_m	X	y_c	y_m	Y	z_c	z_m	Z	Z_m	Z_M
1945								+".106			
.06	−".169	−".138	−".153	+".009	+".030	−".019	+".030	− .079	+".068	+".095	+".072
.14	− .196	− .152	− .174	+ .043	+ .064	− .053	− 089	+ .109	− .084	− .078	− .091
.22	− .129	− .146	− .137	+ .137	+ .159	+ .148	+ .079	+ .002	+ .094	+ .084	+ .084
.31	− .007	− .124	− .066	+ .223	+ .216	+ .219	− .027	− .068	− .012	− .017	− .002
.40	+ .065	+ .120	+ .092	+ .230	+ .235	+ .232	− .085	− .110	− .076	− .096	− .073
.48	+ .170	+ .172	+ .171	+ .219	+ .254	+ .236	− .158	− .120	− .134	− .120	− .131
.55	+ .283	+ .186	+ .234	+ .124	+ .115	+ .119	− .112	+ .027	− .116	− .142	− .109
.64	+ .310	+ .248	+ .279	+ .038	+ .033	+ .036	− .020	+ .012	+ .003	− .034	+ .018
.72	+ .343	+ .267	+ .305	− .059	− .071	− .065	+ .073	+ .071	+ .042	+ .036	+ .065
.81	+ .292	+ .187	+ .239	− .189	− .177	− .183	+ .093	− .146	+ .082	+ .031	+ .063
.89	+ .037	+ .163	+ .100	− .172	− .262	− .217	− .201	+ .162	− .172	− .148	− .104
.97	+ .045	+ .104	+ .074	− .239	− .135	− .187	+ .070	+ .100	+ .116	+ .124	+ .125
1946											
.06	− .067	− .162	− .114	− .165	− .151	− .158	+ .145	− .066	+ .122		
.14	− .141	− .179	− .176	− .122	− .050	− .086	− .078	+ .065	− .072		
.22	− .136	− .247	− .192	− .042	+ .034	− .001	+ .083	+ .024	+ .074		
.30	− .231	− .204	− .217	+ .191	+ .142	+ .166	− .070	− .076	− .023		
.39	− .113	− .155	− .134	+ .203	+ .275	+ .239	− .156	− .186	− .116		
.48	− .055	− .047	− .051	+ .289	+ .231	+ .260	− .196	− .134	− .167		
.56	+ .140	+ .095	− .117	+ .273	+ .302	+ .295	− .204	− .083	− .169		
.64	+ .156	+ .171	+ .163	+ .229	+ .281	+ .255	− .059	+ .013	− .071		
.72	+ .263	+ .263	+ .263	+ .163	+ .163	+ .163	+ .044	− .088	+ .029		
.81	+ .263	+ .278	+ .270	+ .084	+ .060	+ .076	+ .048	− .146	− .020		
.89	+ .246	+ .234	+ .240	− .067	− .042	− .054	− .102	+ .198	− .124		
.97	+ .290	+ .167	+ .228	+ .047	− .059	− .053	+ .067	+ .090	+ .132		

Le coordinate X ed Y della tabella IV sono state poi riportate come ordinate su di un grafico avente per ascisse le epoche, premettendo pure i valori ottenuti alla fine del 1944; il collegamento di questi punti con un tratto di curva continua ha acconsentito di ricavare in corrispondenza ai decimi di ciascun anno, i valori delle coordinate del Polo istantaneo per quell'istante: sono questi i valori delle x ed y riportati nella seconda e terza colonna della tabella V, ove poi, come di uso, sono date di decimo in decimo d'anno per il 1945 e 1946 le deviazioni della latitudine per le diverse longitudini a partire dal meridiano fondamentale di Greenwich. Non vi è necessità di rilevare a questo proposito, che i valori dell'ultima linea hanno un carattere del tutto provvisorio essendo derivati dalle x ed y ottenute con una estrapolazione contenente una certa arbitrarietà.

Servendoci poi ancora delle coordinate istantanee del Polo si è delineata la polodia che si vede nella figura. È notevole osservare come nel corso dei due ultimi anni lo scostamento del Polo istantaneo rispetto a quello medio è stato notevolmente alto; mantenendosi il raggio vettore sull'ordine di grandezza di circa 0″.3, ossia in misura lineare di una decina di metri Il fatto non è però nuovo, chè già altra volta, da quando esiste il servizio internazionale, è stato notato analogo scostamento. Fra il principio del 1909 ed il principio del 1917, per circa otto anni di seguito, il Polo si è mantenuto infatti permanentemente a una distanza analoga a quella osservata negli ultimi anni. Questo ritorno dopo una trentina di anni ad un scostamento massimo potrebbe dare adito all'ipotesi dell'esistenza di periodi relativamente lunghi accanto a quelli già noti annuale e Chandleriano ed agli altri molto probabili di piccola ampiezza e di breve durata, ma ben difficile sembra allo stato attuale delle cognizioni nostre dire qualche cosa in proposito: solo il confronto della polodia dei prossimi decenni potrà forse chiarire questo punto e decidere se ci si trova di fronte ad accidentale coincidenza o ad una vera e propria ripetizione di fenomeno avente carattere periodico. È però notevole il fatto, che come avvenne fra il 1909 ed il 1917, anche in questi due ultimi anni la traiettoria del Polo si è manifestata in maniera identicamente dissimetrica rispetto agli assi di riferimento, mostrando un analogo spostamento nelle direzioni positive sugli assi delle x e delle y. Ciò porterebbe a conchiudere che mentre la posizione del Polo medio si è conservata probabilmente inalterata, la posizione sua reale sembra risulti non coincidente con l'origine degli assi cartesiani ma invece in prossimità del punto avente le coordinate: $X = +0.03''$ ed $Y = +0.04''$. Ma anche per questo saranno le osservazioni degli anni futuri, ed i calcoli definitivi a portare maggiore luce.

Tabella V.

Epoca	x	y	$+12^h$	$+10^h$	$+8^h$	$+6^h$	$+4^h$	$+2^h$	$+0^h$	-2^h	-4^h	-6^h	-8^h	-10^h	-12^h
1945.0	−″.144	−″.062	+″.144	+″.094	+″.018	−″.062	−″.126	−″.156	−″.144	−″.094	−″.018	+″.062	+″.126	+″.156	+″.144
.1	− .173	+ .012	+ .173	+ .157	+ .099	+ .012	− .073	− .143	− .173	− .157	− .099	− .012	+ .073	+ .143	+ .173
.2	− .152	+ .135	+ .152	+ .199	+ . 93	+ .135	+ .041	− .065	− .152	− .199	− .193	− .135	− .041	+ .065	+ .152
.3	− .060	+ .211	+ .060	+ .157	+ .213	+ .211	+ .153	+ .053	− .060	− .157	− .213	− .211	− .153	− .053	+ .060
.4	+ .092	+ .237	− .092	+ .038	+ .159	+ .237	+ .251	+ .198	+ .092	− .038	− .159	− .237	− .251	− .198	− .092
.5	+ .191	+ 228	− .191	− .051	+ .102	+ .228	+ .292	+ .279	+ .191	+ .051	− .102	− .228	− .292	− .279	− .191
.6	+ .280	+ .065	− .280	− .220	− .084	+ .065	+ .196	+ .274	+ .280	+ .210	+ .084	− .065	− .196	− .274	− .280
.7	+ .305	− .038	− .305	− .283	− .185	− .038	+ .119	+ .245	+ .305	+ .283	+ .185	+ .038	− .119	− .245	− .305
.8	+ .252	− .078	− .252	− .307	− .280	− .178	− .028	+ .129	+ .252	+ .307	+ .280	+ .178	+ .028	− .129	− .252
.9	+ .115	− .215	− .115	− .207	− .243	− .215	− .129	− .007	+ .115	+ .207	+ .243	+ .215	+ .129	+ .007	− .115
1946.0	+ .012	− .176	− .012	− .098	− .158	− .176	− .146	− .078	+ .012	+ .098	+ .158	+ .176	+ .146	+ .078	− .012
.1	− .144	− .105	+ .141	+ .073	− .019	− .105	− .163	− .177	− .144	− .073	+ .019	+ .105	+ .163	+ .177	+ .144
.2	− .191	− .004	+ .191	+ .163	+ .092	− 004	− .098	− .167	− .191	− .163	− .092	+ .004	+ .098	+ .167	+ .191
.3	− .217	+ .166	+ .217	+ .271	+ .252	+ .166	+ .036	− .105	− .217	− .271	− .252	− .166	− .036	+ .105	+ .217
.4	− .140	+ .234	+ .140	+ .238	+ .273	+ .234	+ .133	− .004	− .140	− .238	− .273	− .234	− .133	+ .004	+ .140
.5	− .020	+ .288	+ .020	+ .161	+ .259	+ .288	+ .239	+ .127	− .020	− .161	− .259	− .288	− .239	− .127	+ .020
.6	+ .134	+ .278	− .134	+ .023	+ .174	+ .278	+ .308	+ .255	+ .134	− .023	− .174	− .278	− .308	− .255	− .134
.7	+ .265	+ .195	− .265	− .132	+ .037	+ .195	+ .301	+ .326	+ .265	+ .132	− .037	− .195	− .301	− .326	− .265
.8	+ .292	+ .092	− .292	− .207	− .066	+ .092	+ .226	+ .299	+ .292	+ .207	+ .066	− .092	− .226	− .299	− .292
.9	+ .246	− .040	− .246	− .233	− .158	− .040	+ .088	+ .193	+ .246	+ .233	+ .158	+ .040	− .088	− .193	− .246
1947.0	+ .214	− .078	− .214	− .224	− .175	− .078	+ .039	+ .146	+ .214	+ .224	+ .175	+ .078	− .039	− .146	− .214



Capodimonte 2 gennaio 1948.

Conduttività termica approssimata per lave fluenti vesuviane

Nota del socio corrispondente **Giuseppe Imbò**

(Adunanza del dì 7 Febbraio 1948)

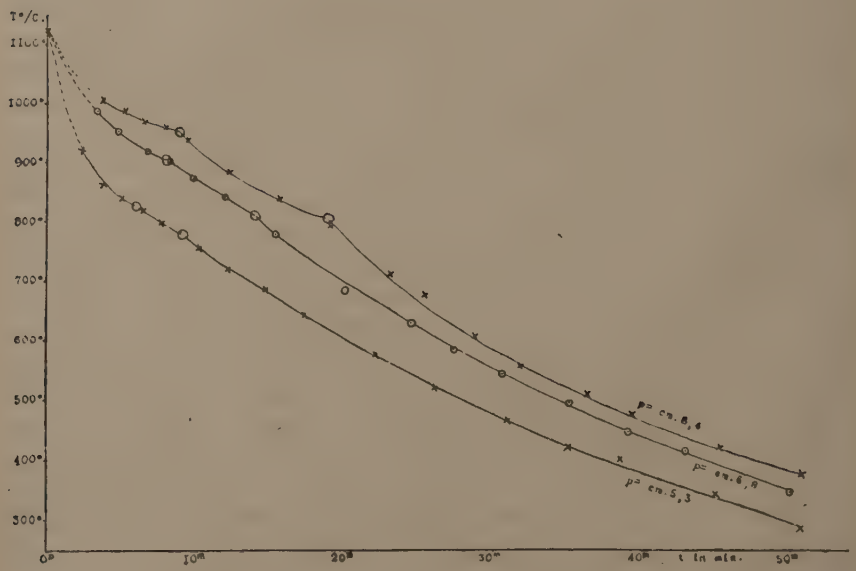
Sunto. — Le osservazioni per lave fluenti vesuviane hanno permesso di dedurre per il coefficiente di conduttività di temperatura, entro il campo termico 300°-600°, il valore approssimato $D = 0.0078 \left[\frac{cm^2}{sec.}\right]$, che risulta presso a poco eguale ai valori finora ottenuti in laboratorio. Si rileva inoltre una diminuzione, con l'aumentare della velocità di raffreddamento, nelle somministrazioni di calorie in conseguenza del processo cristallogenetico.

Se scarse sono le ricerche relative alla determinazione della conduttività termica delle rocce vulcaniche, non mi consta si siano tentate misure per le lave fluenti. Questa considerazione mi ha indotto alla pubblicazione di alcune osservazioni eseguite sulle lave fluenti vesuviane che ne consentono in effetti solo un calcolo approssimato.

Scopo della ricerca fu l'analisi termica in situ di frammenti lavici a forma di parallelepipedi e distaccati con opportuni accorgimenti dalla corrente. Le ricerche compiute tra il dicembre 1934 ed il giugno 1935 condussero al risultato che l'andamento termico presentava un flesso ad una temperatura invero variabile tra i 760° *C* e gli 800° *C* a seconda dei campioni, ma, a quel che sembra, indipendente dalla profondità. Nelle svariate serie le osservazioni furono eseguite contemporaneamente, in corrispondenza della verticale (asse *z*, positivo verso l'interno del blocco) per il centro (centro delle coordinate) della superficie considerata come piano *xy*) nella quale si introducevano le pinze, solo a una o a due profondità; nella sola serie del 15 giugno 1935 fu contemporaneamente seguìto il raffreddamento della lava alle tre distanze dal piano di riferimento (superficie primitiva della corrente lavica, corrispondente al piano *xy*) di cm. 5,3; di cm. 6,8; di cm. 8,4.

Nel quadro seguente (tabella I[a]) sono riportate le effettuate dirette misure di temperature, corrette per le temperature del giunto freddo ed opportunamente raggruppate in corrispondenza dei tempi *(t)* in minuti contati a partire dall'istante in cui, dopo che i tre apparecchi di misura indicavano la medesima temperatura (quella della corrente, di circa 1130°), si effettuò il distacco del blocco lavico dalla corrente.

z_1 = cm. 8,4		z_2 = cm. 6,8		z_3 = cm. 5,3	
t	T	t	T	t	T
				1.m3	923°
3.m3	1005°	3.m3	978°	3.7	865
5.2	988	4.7	954	5.0	843
6.5	972	6.7	921	6.4	822
7.9	961	8.2	906	7.7	801
9.4	939	9.8	875	10.2	757
12.2	886	11.9	844	12.1	722
15.6	840	15.3	781	14.6	688
19.0	794	20.0	688	17.3	645
23.1	714	24.5	633	22.1	579
25.4	680	27.4	588	26.1	523
28.8	616	30.6	548	31.0	469
31.8	560	35.1	499	35.0	423
36.3	514	39.1	450	38.6	403
39.3	486	43.0	420	44.9	345
45.3	423	50.0	349	50.6	287
50.8	378				



Analisi termiche in situ di lava vesuviana — 15 giugno 1935.

Dalla rappresentazione grafica (vedi figura) si rileva che si hanno in ciascuna curva probabilmente due flessi, dei quali uno a temperatura variabile, a quanto pare decrescente con la profondità, mentre il secondo (quello già precedentemente indicato) alla temperatura presso a poco costante di 800° (780°-810°), la quale, secondo l'interpretazione già data, corrisponderebbe alla temperatura d'irrigidimento della massa lavica.

Si possono quindi distinguere nelle singole curve tre tratti, dei quali, in base alla ammessa spiegazione, nel solo terzo tratto nel corso del raffreddamento non si avrebbero altre somministrazioni di calore, mentre nei primi due, accanto alla conduzione termica, bisogna tener conto anche delle calorie sviluppate in seguito al complesso processo cristallogenetico estratellurico.

Nel caso generale e nella sua forma completa l'equazione differenziale della conduzione del calore, se s'indicano con F le calorie sviluppate per cm³ e per unità di tempo in seguito a solidificazione, risulta data dalla relazione:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + F \qquad (1)$$

dove si è ancora espresso: con ρ la densità, con c il calore specifico e con K il coefficiente di conducibilità termica del mezzo.

Se però per il blocco lavico esaminato si suppone che le dimensioni trasversali (le sezioni del blocco, parallele al piano xy, possono considerarsi come quadrati di 25 cm. di lato) siano tali da poter ritenere che, almeno nella zona mediana, le superfici isoterme risultino piane e parallele al piano di riferimento, la propagazione del calore risulterà, come si suol dire, unidimensionale, essendo in tal caso:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

Ammesso ancora che si possa sostituire all'equazione differenziale (1) un'equazione alle differenze finite, e qualora risulti anche $F=0$, nel caso semplificato si ha:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = D' \frac{\Delta^2 T}{\Delta z^2} \qquad (3)$$

in cui:

$$D' = \frac{K}{\rho c}$$

rappresenta il cosiddetto coefficiente di conducibilità di temperatura.

Sarà appunto la (3) che consente il calcolo di D' per il terzo tratto. Dalla figura appare invero che un andamento conforme (e cioè in identiche condizioni) per tutte e tre le curve si ha a partire all'incirca dal 20° minuto. Calcolando innanzi tutto mediante interpolazione logaritmica le temperature contemporanee alle tre distinte profondità, si sono ottenute per la profondità media $p = 6.82$ cm. ed in corrispondenza di valori equidistanti del tempo *(t)*: valori delle velocità di raffreddamento (gradi / sec.) e delle variazioni nei gradienti (gradi / cm.^{2}) ed in conseguenza di D', valori che, opportunamente raggruppati, sono riportati dalla seguente tabella:

$p = 6.82$ cm.

t	$\frac{\Delta T}{\Delta t}$	$\frac{\Delta^2 T}{\Delta z^2}$	D'
25^m	— 0°.238	— 13°.13	0.0181
30	— 0°.216	— 16°.84	0.0128
35	— 0°.178	— 16°.81	0.0106
40	— 0°.157	— 12°.68	0.0124
45	— 0°.161	— 13°.69	0.0118

Attribuendo peso 1 al primo valore, che si scosta decisamente dai successivi, e peso 2 egli altri si ha quindi per il coefficiente di conducibilità di temperatura il valore medio:

$$D' = 0.0125$$

Questo valore è notevolmente elevato rispetto a quello medio che si assume per le lave e la discordanza ovviamente deve, almeno principalmente, derivare da inaccettabilità dell'ipotesi posta a base del problema.

Se però le condizioni (2) non sono ammissibili, risulta evidente, per la tendenza all'annullamento dei gradienti con l'aumentare della distanza dalla superficie libera, che ambedue le variazioni nei gradienti paralleli agli assi x ed y, identiche per simmetria, siano trascurabili rispetto a quella nel gradiente rispetto all'asse z. Ponendo quindi:

$$\frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 T}{\Delta y^2} = a \frac{\Delta^2 T}{\Delta z^2} \qquad (4)$$

in cui il fattore a risulta variabile col tempo e con la distanza dalle corrispondenti superfici libere, l'equazione della conduzione risulta data egualmente dalla (3), in cui però si ha:

$$D' = f D \qquad (5)$$

e dove D rappresenta il coefficiente vero di conducibilità di temperatura ed f un fattore dato da

$$f = 1 + 2\,a \qquad (6)$$

Se non è possibile avere il valore esatto per a, è consentito invece averne un valore approssimato e di conseguenza anche i valori di f e quindi di D risulteranno approssimati. Il calcolo è però effettuabile nella supposizione, non rigorosamente lecita, che la legge di variazione della temperatura con la profondità (relativa ora alle facce normali al piano di riferimento) sia la stessa di quella rilevata secondo l'asse delle z. Estrapolando pertanto, nell'intervallo dei tempi considerati, i valori ottenuti delle T fino a profondità di cm. 11,0; cm. 12,5; cm. 14,0, sarà consentito, in base alla (4), il calcolo di a per una profondità di $p = 12.5$ cm. quale è in effetti la distanza dalle considerate facce.

Si deduce pertanto:

$$a \sim 0\,3$$

e di conseguenza, in base alla (6):

$$f \sim 1.6$$

Per il valore approssimato del coefficiente di conduttività di temperatura si ha quindi, in base alla (5), il valore:

$$D = 0.0078\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec.}}\right].$$

valore che risulta presso a poco eguale ai valori finora ottenuti in laboratorio per lave vesuviane, come può rilevarsi dal seguente specchio:

Lava vesuviana del 1631 (Torre del Greco): 0.00813 — 0.00866 — 0.00754
» » » » (Torre Ann.ta): 0.00880 — 0.00916 — 0.00817
» » » 1858 (presso Osserv.): 0.00784

Seguendo un procedimento analogo e nell'ipotesi che D' risulti costante al variare della temperatura e che inoltre per tratti corrispondenti anche F non vari col tempo e con la profondità, si deducono appunto per F, nella supposizione che si abbia per il calore specifico (c) e per la densità (ρ) della lava esaminata:

$$c = 0.27 \quad , \quad \rho = 2.7 \quad ;$$

i seguenti valori in calorie per cm.^{3} e per sec., distintamente per il primo tratto (F'_1) e per il secondo tratto (F'_2), negli intervalli di tempo, ad anda-

mento conforme per le tre esaminate profondità, rispettivamente $1^m - 2^m$ e $8^m - 10^m$:

$$F'_1 = 0{,}071$$
$$F'_2 = 0{,}013.$$

Invero nei punti di flesso per le singole curve risulta agevole il calcolo delle variazioni nelle somministrazioni di calorie. Difatti se si indica con Δq le variazioni nella quantità di calore per unità di volume e di tempo per effetto della conduzione, la (1) potrà scriversi:

$$c\rho \frac{\Delta T}{\Delta t} = \Delta q + F$$

e di conseguenza, indicando in ciascun flesso i valori delle variabili con l'indice n' o n'' a secondo che se ne considera il valore come facente parte del tratto antecedente o successivo, per differenza si ottiene:

$$c\rho \left[\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_{n'} - \left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_{n''}\right] = F_{n'} - F_{n''} = \Delta F^{n'}_{n''} \quad , \qquad (7)$$

risultando evidentemente:

$$\Delta q_{n'} = \Delta q_{n''}.$$

L'applicazione della (7) per ambedue i flessi delle singole curve lascia dedurre i valori di ΔF per il primo flesso e di $F_{2'}$ per il secondo (essendo, a quanto si è detto, $F_{2''} = 0$) figuranti nella seguente tabella accanto ai valori relativi del tempo (in minuti) e della temperatura, nonchè delle velocità (in gradi per secondo) di raffreddamento:

p cm.	1° FLESSO				2° FLESSO			
	t	T	$\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_{1'}$	$\Delta F^{1'}_{1''}$	t	T	$\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_{2'}$	$F_{2'}$
8.4	$9^m.1$	951°	0.137	0.21	$18^m.4$	810°	0,172	0.14
6.8	8.1	907	0.197	0.09	14 0	812	0.248	0.10
5.3	5.8	834	0.239	0.04	9.1	781	0.258	0.05

Dal quadro risulta evidente la variazione delle somministrazioni di calorie con la velocità di raffreddamento nel senso di un aumento col diminuire della velocità. Questo comportamento, accreditato maggiormente per l'andamento relativo al secondo flesso, in quanto verificatosi presso a

poco alla medesima temperatura, si accorda con le osservazioni relative al consolidamento delle lave. D'altro canto la dedotta variazione, nel mettere in evidenza un conseguente graduale aumento nella F pei singoli tratti considerati, rende ancor conto del notevole divario coi valori (da ritenersi invero medi) delle somministrazioni di calorie precedentemente dedotti nella supposizione invece di una costanza. In conclusione la considerata serie di misure di temperature, oltre a permettere la deduzione del valore approssimato per il coefficiente di conducibilità di temperatura per le lave fluenti, dà ancora conferma delle conclusioni sull'esistenza, nelle curve di raffreddamento, di flessi corrispondenti invero a riduzioni nelle somministrazioni di calorie.

Mentre però per uno verificantesi a temperatura pressochè costante di 780° — 810°, si trova la spiegazione nell'arresto di cristallizzazione per l'irrigidimento della pasta di fondo, nei riguardi dell'altro l'esiguità delle osservazioni, nonchè la non ancora ben chiara legge di variazione con la distanza dalla superficie non consentono la deduzione di una sicura genesi, che potrà eventualmente ottenersi in base a contemporanee ed opportune ricerche termiche e petrografiche.

BIBLIOGRAFIA

Bartoli A.. *Sul calore specifico fino ad alta temperatura delle lave dell' Etna e di altri vulcani.* Atti Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania, vol. III, serie 4ª.

Friedlaender J.. *Ueber die Wärmeleitung einiger vulkanischer Gesteine*-Gerlands. Beiträge zur Geophysik, XI, 85.

Imbò G.. *Studio preliminare sul raffreddamento delle attuali lave vesuviane.* Bull. Volc.. N. 27 a 30, 1931.

A PROPOSITO DI UN'ANALISI TERMICA RELATIVA A LAVA ETNEA DEL 1947

Nota del socio corrispondente **Giuseppe Imbò**

(Adunanza del dì 7 Febbraio 1948)

Sunto. — La temperatura d'irrigidimento per la lava etnea 1947 risulta all'incirca di 660°-680°, presso a poco la stessa che misure di laboratorio lascerebbero dedurre per la lava del 1923. Il confronto con temperature d'irrigidimento rilevate per lave vesuviane è giovato per interessanti considerazioni che permetterebbero di giungere persino all'identificazione della temperatura d'irrigidimento con un numero indice del coefficiente di viscosità magmatico.

Nel corso dell'episodio effusivo di Monte Pizzuto del 5 marzo 1947 mi è riuscito di poter eseguire in situ analisi termiche delle lave fluenti a solo una trentina di metri dalla bocca situata alla base di una diramazione trasversale della fenditura principale.

Per rendere agevole l'osservazione venne scelto il margine meridionale di una lingua lavica secondaria, in modo che fu consentito la permanenza nel medesimo posto per oltre tre ore. Nel moto della corrente si notavano infiltrazioni laviche rovesciantisi poi sulla parete esterna e successivamente distaccantisi sotto forma di brandelli più o meno voluminosi. Si cercò di introdurre l'estremità della pinza per circa 3 o 4 cm. precisamente in queste teste laviche prossime al distacco e fu scelto in definitiva, dopo misure preliminari, il blocco che per le sue dimensioni dava maggiore garanzia di un uniforme e non rapido raffreddamento [1]).

Pe il blocco considerato le temperature ottenute (T, in gradi centigradi) al variare del tempo (t, in minuti) con una profondità del giunto caldo di cm. 4,2, corrette per la temperatura del giunto freddo, sono indicate nel seguente quadro e riportate anche nella figura 1 (curva a)

---

[1]) Per altre indicazioni vedi: G. Imbò, *Studio preliminare sul raffreddamento delle attuali lave vesuviane*. Bull. Volc., N. 27 a 30, 1931. Le ricerche sono state eseguite con la cooperazione dei miei compagni di escursione: prof. F. Stella Starrabba, dott. G. Silvestri, sig. R. Pezza, cui vanno i miei memori e riconoscenti ringraziamenti. Sento inoltre il dovere di ringraziare il prof. G. Malquori per avere con signorilità ed affetto messo a disposizione l'Istituto di Chimica Industriale da lui diretto, ed il prof. Cirilli per avere con distinta gentilezza eseguito personalmente le analisi termiche in laboratorio ed ancora il controllo della taratura dello apparecchio adoperato, che è risultata esatta.

t	T	t	T	t	T
0.0	964°	7.0	775°	13.0	606°
1.0	954	8.0	746	14.0	590
2.0	924	9.0	717	15.0	564
3.0	894	10.0	692	16.0	543
4.0	860	11.0	658	17.0	522
5.0	834	12.0	637	18.0	502
6.0	800				

Dalla figura (fig. 1) risulta abbastanza evidente l'esistenza di un flesso in corrispondenza del ristretto intervallo termico 660° — 680°. Valendomi del metodo altrove descritto [1]), nella supposizione che alle temperature indicate si abbia per il calore specifico *(c)* all'incirca il valore:

$$c = 0.27 ,$$

ho potuto rilevare che il flesso corriponde ad un salto nella velocità di raffreddamento da 0°,143 gradi / sec. a 0°,454 gradi / sec. in conseguenza

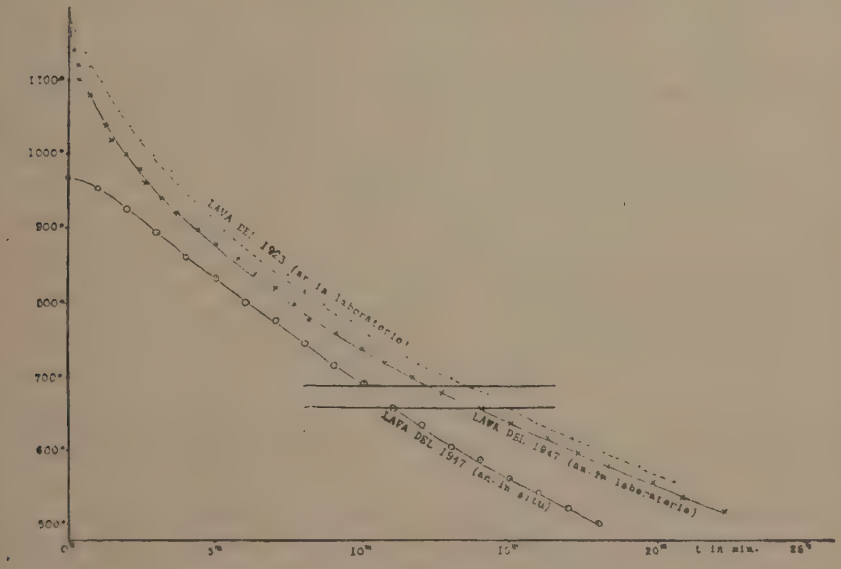


Fig. 1. — Analisi termiche di lave etnee.

della cessazione di una somministrazione, per grammo e per secondo, di **cal. 0.003.**

[1]) Imbò G., *Conduttività termica approssimata per le lave fluenti vesuviane.* (Questo volume).

La ripetizione dell'analisi in laboratorio oltre ad altre particolarità, sulle quali non ritengo opportuno ora di soffermarmi, ha rivelato l'esistenza di un flesso presso a poco entro il medesimo intervallo termico. Per l'analisi, il campione di lava etnea 1947 fu prima polverizzato e poi portato a temperatura di circa 1150°. Ed un flesso pure entro il medesimo intervallo termico, si è avuto nell'analisi anche in laboratorio per un campione di lava sempre dell'Etna del 1923.

Si ricorda che nel caso di lave fluenti vesuviane un aumento nella velocità di raffreddamento si è manifestato nei vari campioni esaminati in situ, per temperature variabili tra 760° e poco più di 800°.

Risulta perciò evidente il notevole distacco tra i due valori relativi rispettivamente a lave etnee ed a vesuviane. [1])

Le indagini finora eseguite permetterebbero di identificare la temperatura media del flesso con una temperatura che, direi, di irrigidimento corrispondente invero ad un ristretto campo termico in cui il coefficiente di viscosità raggiungerebbe valori tanto elevati da impedire il prolungarsi del fenomeno cristallogenetico. Ed a giustifica dell'interpretazione starebbero le seguenti osservazioni: brusca cessazione nel flesso della osservata somministrazione di calorie di fusione; struttura vetrosa per lave bruscamente raffreddatesi, nonchè la predisposizione di una tale struttura per i magmi maggiormente viscosi. L'esposto comportamento esigerebbe però il verificarsi di una condizione necessaria e cioè che la variazione nel coefficiente di viscosità con la temperatura non sia uniformemente lenta, per evidente e conseguente mancanza in tal caso della nettezza del flesso che appare invece deciso ed in tutti i campioni esaminati sia etnei che vesuviani. Se purtroppo mancano osservazioni di campagna, le sole che potrebbero invero permettere decisive deduzioni, vi sono invece osservazioni di laboratorio che metterebbero in risalto il probabile verificarsi della sopradetta imposta condizione. E difatti per lava basalto-andesitica in corrispondenza delle sottoindicate temperature *(T)* si sono ottenuti i coefficienti di viscosità *(ν)* indicati a lato ed espressi in poise:

T	ν	*T*	ν
1400°	138	1250°	541
1350	182	1200	31168
1300	259	1150	79470

[1]) Sembra che in parte la differenza debba dipendere dal fatto che, per inesattezza di taratura, nelle misure eseguite al Vesuvio le temperature risultano alquanto (senza poter dire oggi la correzione) più elevate delle effettive.

Dal quadro e più evidentemente dalla figura (2), in cui sono state assunte come ascisse le temperature e come ordinate i loglogv, risulta palese l'esistenza del previsto ristretto campo termico in cui si avrebbe appunto, in conseguenza, ad esempio, di un raffreddamento, un rapido e notevole

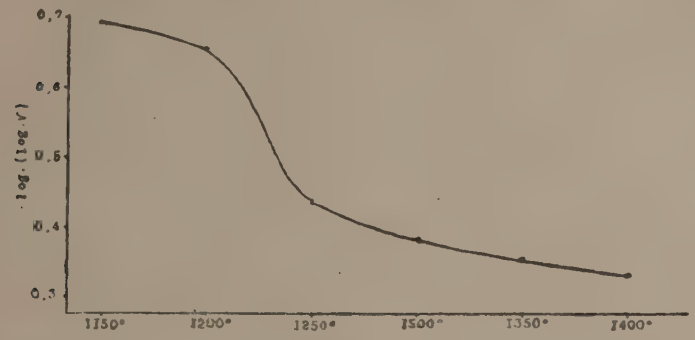


Fig. 2. — Variazione del coefficiente di viscosità *(v)* con la temperatura *(°/C)* per una roccia basalto - andesitica.

aumento del coefficiente di viscosità, mentre sia per temperature inferiori che per superiori le variazioni nel detto coefficiente sono relativamente lente. Pur non essendo rigorosamente lecita la generalizzazione del risultato, a me sembra di potersi supporre un identico comportamento per tutte le lave, salvo uno spostamento del campo termico a rapida variazione nel coefficiente di viscosità, a seconda della viscosità magmatica stessa.

Un tale comportamento, almeno per lave basiche, sembra confermato in base a ricerche del Kani e riportate dal Bowen.

Se si accetta inoltre l'intuitiva deduzione (che dovrebbe invero essere dimostrata sperimentalmente) della quasi costanza dei valori dei coefficienti di viscosità tra i quali si verificherebbe il salto indicato con conseguente consolidamento, potrebbe in definitiva concludersi che le temperature di irrigidimento delle lave risulterebbero decrescenti col diminuire della viscosità dei magmi, da cui esse deriverebbero. Le osservazioni eseguite lascerebbero pertanto dedurre che nelle condizioni all'epoca delle eseguite prove, il coefficiente di viscosità per il magma vesuviano risultava perciò più elevato di quello relativo al magma etneo.

Grosso modo, a parte e a parità di altre condizioni, si lascia dipendere il coefficiente di viscosità dei magmi dalla natura di questi e precisamente dal tenore in silice, nel senso che il detto coefficiente decrescerebbe con il diminuire della percentuale in silice. Un confronto tra le analisi recenti per lave vesuviane ed analisi, relative al 1928, per l'Etna mostra che nessuna differenza sensibile si nota nelle percentuali per SiO_2 (si ha difatti 47,76 per l'Etna e 47,73 per il Vesuvio): sotto questo punto di vista non sarebbe

perciò giustificata la differenza riscontrata. Nei riguardi degli altri componenti si notano per l'Etna eccessi sensibili (indicati a lato) nelle percentuali per:

$$Ti\,O_2\ 1.63 \qquad \begin{cases} Fe_2O_3 & 1.52 \\ FeO & 0.63 \end{cases} \qquad MgO\ 1.87 \qquad CaO\ 1.89$$

e per il Vesuvio

$$K_2O \quad 6.33 \qquad Al_2O_3 \quad 1.92$$

Neanche però l'esame comparativo di tali eccessi lascia inequivocabilmente spiegare il riscontrato comportamento.

L'alta viscosità delle lave vesuviane, all'epoca dell'esame, fu invero attribuita al fatto del relativamente scarso tenore in componenti volatili ed ancora al basso rapporto tra feltro e solido.

Nei riguardi della prima considerazione, mentre si avrebbe una prova nella quasi costanza della temperatura del flesso alle varie profondità (conclusione che potrebbe estendersi anche alle lave etnee, a giustificazione della costanza della temperatura di flesso in campagna e in laboratorio); d'altro canto, come ammette anche l'Aquilina, sembrerebbe probabile ritenere, in base ad analisi del fenomeno ed al fatto che in laboratorio si sia dovuto portare la lava ad oltre 1000° per il riassorbimento dei microfenocristalli che il contenuto lavico in componenti volatili doveva essere ancora sensibile.

Lo stretto legame tra coefficiente di viscosità e modalità eruttive oltre a dare un contributo per una spiegazione del diverso carattere relativo ai due vulcani, dimostra inoltre in genere l'importanza del proseguimento ed estensione delle ricerche, che si sono con rincrescimento necessariamente dovute sospendere per mancanza dell'attrezzatura opportuna della quale, mi auguro, l'Osservatorio potrà essere dotato. Tale importanza, a mio parere, da un canto è rivelata dalla possibilità di giovare a parallele ricerche cristallogenetiche estratelluriche; d'altro canto, ed è precisamente quello che intendo mettere qui maggiormente in evidenza, dalla possibilità di avere con la temperatura d'irrigidimento un numero indice del coefficiente di viscosità magmatica (*vero*, se eseguito in campagna, con i dovuti accorgimenti, in quanto corrispondente a condizioni fisico-chimiche rispecchianti, più di quanto non lo possano le misure di laboratorio, quelle effettive magmatiche; *apparente* se in laboratorio per le evidenti diversità di condizioni con quelle precedenti) e di conseguenza un criterio, non più semplicemente qualitativo e soggettivo, per interpretare e stabilire il tipo di attività di un vulcano.

BIBLIOGRAFIA

AQUILINA C., *Temperature delle lave del Vesuvio in rapporto al tipo di attività ed alla petrografia del prodotto « solido » durante l'eruzione effusiva del mese di novembre 1940*. Ric. Scientif., Anno 12° (1941), N. 743.

BARTH T. F. W., CORRENS (C. W.), ESKOLA (P.), *Die Entstehung der Gesteine*. Berlin, Julius Springer, 1939.

BOWEN N. L., *Viscosity data for silicate melts*. Trans. Am. Geoph. Union, 1934.

IMBÒ G., *Considerazioni a proposito delle recenti eruzioni etnee*. Boll. Soc. Nat., 1947.

SCHERILLO A., *Le lave attuali del Vesuvio*. Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. della Soc. Reale di Napoli, s. 4ª, vol. XII (1941-1942) e vol. XIII (1942-1943).

STELLA STARRABBA F., *Sulle lave dell'eruzione dell'Etna del 1928. Le variazioni della composizione chimica durante il periodo effusivo*. Bull. Volc. N. 15 a 18, 1928.

I PROBOSCIDATI FOSSILI NELLO STATO ATTUALE DELLA SCIENZA

Nota del socio ordinario **Geremia D'Erasmo**

(Adunanza del dì 6 marzo 1948)

Sunto. — Vengono brevemente esposte le attuali cognizioni sull'origine, evoluzione e migrazione delle numerose famiglie terziarie e quaternarie di Proboscidati in seguito alla pubblicazione della monografia postuma di H. F. OSBORN e dei recenti lavori di C. PETROCCHI e di L. TREVISAN, e vengono segnalati alcuni altri ritrovamenti di avanzi di elefanti fossili in Italia.

HENRY FAIRFIELD OSBORN, il grande paleontologo americano noto in tutto il mondo per i suoi geniali studi sulla filogenesi di vari gruppi di vertebrati (specialmente rettili e mammiferi) e per le sue sintesi sulla evoluzione delle specie, morì a 78 anni, nel novembre 1935, mentre attendeva ad un poderoso lavoro sui Proboscidati, che non solo doveva rappresentare il risultato finale di un quarantennio di ricerche da lui compiute su quel gruppo di mammiferi, direttamente studiandone gli avanzi rinvenuti in ogni parte del globo, ma doveva altresì costituire una completa monografia sulla comparsa, evoluzione, migrazione ed estinzione dei mastodonti e degli elefanti sulla terra.

Pochi mesi dopo la sua fine, e cioè nell'agosto 1936, fu pubblicato, a cura dell'American Museum of Natural History di New York con i fondi

lasciati dal benemerito John Pierpont Morgan, il primo volume dell'opera, che comprendeva i *Moeritherioidea*, i *Deinotherioidea* e i *Mastodontoidea*; e nel 1942 ha visto la luce il secondo volume, che tratta degli *Stegodontoidea* e degli *Elephantoidea*: complessivamente 1676 pagine in 4° grande, con 1244 illustrazioni nel testo, 30 tavole in nero e 2 a colori [1]).

Di quest'opera, completata mentre in Europa infuriava la guerra e della quale solo ora cominciano a giungere in Italia i primi esemplari del 2° volume, desidero dare una breve notizia, non soltanto per segnalarne l'importanza a quanti si occupano di proboscidati estinti e viventi, ma anche per rilevare che tra le numerose località di ogni parte del mondo citate per il rinvenimento di cospicui avanzi fossili l'Italia figura per non meno di 16 specie o sottospecie, pur non essendo tenuto conto di molti altri ritrovamenti che meriterebbero di essere ugualmente ricordati, anche se trattasi di avanzi di minore importanza.

La superba monografia, che non si sa se apprezzare più per la sicurezza delle diagnosi e la larghezza dei confronti o per la magnificenza della edizione e la ricchezza delle illustrazioni — le quali riproducono con uguale chiarezza e precisione tanto le antiche figure di de Blainville, Nesti, Falconer ecc. ed i fac-simile del « *Systema Naturae* » di Linneo quanto le fotografie ed i disegni degli avanzi fossili recentemente scoperti e dei rappresentanti delle specie ancora viventi — non ha, purtroppo, potuto avere l'ultima revisione da parte dell'autore, del quale, come si è detto, si ebbe a lamentare la perdita quando la stampa del primo volume non era ancora ultimata. Della mancanza di un coordinamento unitario risente particolarmente il secondo volume, che, pubblicato con parecchi anni di ritardo rispetto alla data prevista, è stato rielaborato parzialmente, in base agli appunti, note, articoli ed illustrazioni lasciati dall'autore, e completato da collaboratori vari, che l'Osborn aveva già da tempo associati alle sue ricerche (Edwin H. Colbert, Margret Flinsch Buba, D. F. Levett Bradley ecc.). È merito di questi ultimi se alcuni capitoli, quali ad esempio quello riguardante le affinità, le migrazioni e la filogenia dei Proboscidati, e l'altro sulla successione geologica di essi durante il Terziario ed il Quaternario, hanno potuto concludere la magnifica opera, nitidamente riassumendo, in una serie di quadri schematici e mappe e tabelle, le idee del paleontologo americano sull'origine, lo sviluppo, la filiazione, le modificazioni e gli spostamenti migratorî dei diversi gruppi di Proboscidati. Di notevole vantaggio per gli eventuali confronti saranno considerati dagli studiosi la spiegazione dei termini tecnici usati nel lavoro, tanto per i molari quanto per le difese

[1]) Osborn H. F., *Proboscidea; a monograph of the discovery, evolution, migration and extinction, of the Mastodonts and Elephants of the world.* Vol. I: *Moeritherioidea, Deinotherioidea, Mastodontoidea.* New York, 1936; vol. II: *Stegodontoidea, Elephantoidea.* New York, 1942.

ed il cranio, l'elenco finale del materiale osteologico più cospicuo rinvenuto per i diversi generi, e la misura (reale o calcolata) dell'altezza raggiunta dalle specie di Proboscidati meglio conosciute, sia fossili che viventi. Una breve appendice, dovuta a GEORGE GAYLORD SIMPSON, tratta infine, col corredo di 5 tavole, dell'istologia dentaria di questi animali.

Non essendo possibile condensare in poche righe l'argomento dei numerosi capitoli che formano il piano grandioso dell'opera, mi limiterò a dare, sotto forma di quadro riassuntivo, la classificazione generale di quest'interessante ordine di mammiferi, secondo le vedute di OSBORN, aggiungendo una brevissima diagnosi dei singoli gruppi ed indicandone schematicamente la diffusione nello spazio e la distribuzione nel tempo.

I. Superfam. Moeritherioidea

Ceppo anfibio, adattato ai fiumi ed alle paludi, con scarso potere migratorio. Rappresentato da un solo genere, imperfettamente conosciuto, vissuto nel Terziario inf. dell'Africa settentrionale e forse anche nell'Oligocene dell'Asia meridionale.

1. Fam. *Moeritheriidae*

1. Subfam. *Moeritheriinae* (1 gen.: *Moeritherium* Andrews, 1901)

Proboscidati primitivi, acquatici, col corpo simile a quello degli Ippopotami o dei Sirenidi. Eoc. sup. e Oligoc. inf.: Africa sett. (Egitto).

II. Superfam. Deinotherioidea

Ceppo delle foreste meridionali adattato alle pianure selvose. Rappresentato da un solo genere, vissuto nell'Africa sett. e centrale e nell'Eurasia merid. e conosciuto da più abbondanti avanzi nel Miocene e nel Pliocene.

2. Fam. *Curtognathidae*

2. Subfam. *Deinotheriinae* (1 gen.: *Deinotherium* Kaup, 1829)

Proboscidati specializzati, fluviatili. Corpo elefantino. Zanne inf. molto grandi e ricurve in basso. Senza zanne sup. Mioc. a Pleist. medio: Eurasia, Africa.

III. Superfam. Mastodontoidea

Ceppo settentrionale, adattato alle pianure, alle savane e alle foreste, con arti meglio sviluppati e ampio potere migratorio. Rappresentato dall'Oligocene inf. dell'Africa sett. al Miocene-Pleistocene dell'Eurasia e delle Americhe.

3. Fam. *Mastodontidae*

3. Subfam. *Palaeomastodontinae* (1 gen.: *Palaeomastodon* Andrews, 1901)

Zanne sup. non conosciute; zanne inf. corte e arrotondate. Denti molari con 6 coni: proto- e meta-conulo nascondono il solco mediano. [Non sono questi gli antenati dei *Mastodontinae*]. Oligoc.: Egitto.

4. Subfam. *Mastodontinae* (3 gen.: *Miomastodon* Osborn, 1922; *Pliomastodon* Osborn, 1926; *Mastodon* Cuvier, 1806, 1817)

Zanne sup. e inf. (se presenti) arrotondate, senza apparente rivestimento di smalto; corpo tipicamente da Mastodonte. Specie dell'Eurasia e Nord Amer., in ordine monofiletico di discendenza dal *Miomastodon* al tipico *Mastodon*.

Mioc. inf. a Pleist. postglac.: Eurasia, Amer. nord.

5. Subfam. *Zygolophodontinae* (2 gen.: *Zygolophodon* Vacek, 1877; *Turicius* Osborn, 1926)

Molari con corona da Mastodonte, valli aperte, conuli progressivamente aggiunti. Mioc. inf. a Plioc. sup.: Eurasia.

6. Subfam. *Stegolophodontinae* (1 gen.: *Stegolophodon* Schlesinger, 1917)

Coni dei molari arrotondati, da Stegodonti: valli compresse; solco mediano persistente nelle creste anteriori. Mio-plioc. a Plioc. sup.: Eurasia.

4. Fam. *Bunomastodontidae*

7. Subfam. *Rhynchorostrinae* (3 gen.: *Rhynchotherium* Falconer, 1863; *Blickotherium* Frick, 1933; *Aybelodon* Frick, 1933)

Mastodonti con mascelle a becco: mandibola fortemente inclinata; rivestimento di smalto sulle zanne sup. e inf. (eccetto *Aybelodon*); zanne inf. rivolte all'insù; molari con conuli centrali variabili; smalto spesso; da 4 a 5 colline.

Mioc. medio a Plioc. sup.: Africa, Asia, Amer. nord.

8. Subfam. *Longirostrinae* (2 gen.: *Trilophodon* Falconer, 1846; *Megabelodon* Barbour, 1914)

Molari intermedi trilofodonti (3 creste); 3° molare con 4-5 o più creste e conuli centrali. Zanne sup. appiattite, ricurve, con rivestimento di smalto; zanne inf. arrotondate, triangolari, appiattite tanto nel senso orizzontale che in quello obliquo, massicce, talvolta assenti. Mandibola iperlongirostrale.

Mioc. inf. a Plioc. sup.: Eurasia, Africa, Amer. nord.

9. Subfam. *Gnathabelodontinae* (1 gen.: *Gnathabelodon* Barbour e Sternberg, 1935)

Mandibola senza zanne, allungata, largamente estesa a formare un rostro sdentato e orizzontale; zanne superiori massicce, arrotondate, senza smalto, ricurve all'insù, allungate. Molari di tipo bunomastodonte, con conuli centrali.

Plioc. medio: Amer. nord.

10. Subfam. *Amebelodontinae* (2 gen.: *Phiomia* Andrews e Beadnell, 1902; *Amebelodon* Barbour, 1927)

Mandibola allungata, leggermente ricurva all'insù; zanne allungate, allargate, ravvicinate, porzione alveolare concava. Conuli grandi.

Olig. (*Phiomia*) e Plioc. medio (*Amebelodon*): Africa, Amer. nord.

11. Subfam. *Tetralophodontinae* (2 gen.: *Tetralophodon* Falconer, 1847; *Morrillia* Osborn, 1924)

I secondi molari tetralofodonti. Mandibola e zanne inf. di media lunghezza (medio-longirostrali). Zanne inf. appiattite, ovali; zanne sup. con rivestimento di smalto. Mioc.-Pleistoc.: Eurasia, Amer. nord.

12. Subfam. *Notorostrinae* (1 gen.: *Cordillerion* Osborn, 1926)

Mandibola brevirostrale. Zanne sup. spirali o orizzontali, con larga fascia di smalto. Zanne inf. mancanti negli adulti, probabilmente presenti negli stadi giovanili. Molari persistentemente brachiodonti, con singoli trifogli; da 4 a $5\frac{1}{2}$ colline.

Plioc.-Pleistoc.: America.

13. Subfam. *Brevirostrinae* (3 gen.: *Pentalophodon* Falconer, 1857; *Anancus* Aymard, 1855; *Synconolophus* Osborn, 1929)

Mandibola rapidamente accorciantesi, in correlazione con la perdita delle zanne inf. Denti mascellari originariamente a corona breve, brachiodonti, diventano poi sub-ipsodonti, con smalto pieghettato; coni interni ed esterni progressivamente alternantisi; conuli centrali. Mioc.-Plioc. sup.: Eurasia.

5. Fam. *Humboldtidae*

14. Subfam. *Humboldtinae* (3 gen.: *Cuvieronius* Osborn, 1923; *Eubelodon* Barbour, 1914; *Stegomastodon* Pohlig, 1912)

Zanne sup. senza smalto. Molari con semplice, duplice o quadruplo trifoglio; colline da $4\frac{1}{2}$ a $7\frac{1}{2}$, colline inf. rivolte all'innanzi, colline sup. rivolte al centro o all'indietro. Conuli centrali rudimentali o assenti.

Plioc. medio-Pleistoc.: Amer. nord e sud.

6. Fam. *Serridentidae*

15. Subfam. *Serridentinae* (4 gen.: *Serridentinus* Osborn, 1923; *Ocalientinus* Frick, 1933; *Serbelodon* Frick, 1933; *Trobelodon* Frick, 1933)

Mastodonti con denti a sega. Molari sup e inf. con creste bene sviluppate e a sega. Le differenze generiche dipendono dagli incisivi inf. più o meno arrotondati o appiattiti o allargati o accorciati o addirittura mancanti.

Mioc. inf.-Plioc. sup.: Eurasia, Amer. nord e centrale.

16. Subfam. *Platybelodontinae* (2 gen.: *Platybelodon* Borissick, 1928: *Torynobelodon* Barbour, 1929)

Zanne tipicamente piatte o adatte a pescare.

Mioc. sup.-Pliocene: Asia e Amer. nord.

17. Subfam. *Notiomastodontinae* (1 gen.: *Notiomastodon* Cabrera, 1929)

Mandibola a rostro breve; zanne mancanti. Plioc.-Pleist. inf.: Amer. sud.

IV. Superfam. Stegodontoidea

Ceppo che ha parecchi caratteri in comune con gli *Elephantoidea*, dai quali fu separato più tardi dallo stesso Osborn, principalmente per l'aspetto della faccia estremamente breve e per le particolarità dei denti molari presentanti valli chiuse o fatte a V. Rappresentato dal Pliocene inf. al Pleistocene sup. dell'Asia, e recentemente citato pure in Africa.

7. Fam. *Stegodontidae*

18. Subfam. *Stegodontinae* (1 gen.: *Stegodon* Falconer e Cautley, 1847)

Phylum parallelo a quello dei veri *Archidiskodon* e *Elephas*, ma non direttamente antenato di questi. Cranio subelefantoide, più o meno allungato, o triangolare. Difese di grandi dimensioni. Molari più brachiodonti di quelli degli *Elephantoidea*; colline che aumentano da 9 a 15 $\frac{1}{2}$ nel 3° molare inf., e conuli che si bipartiscono fino a 20 e più. Plioc. inf.-Pleistoc sup.: Asia

V. Superfam. Elephantoidea

Ceppo adattato alle pianure, savane e steppe: perciò nutrentesi di rami teneri o di erbe, e fornito pure di ampio potere di migrazione. Rappresentato nel Pliocene e nel Pleistocene dell'Eurasia, dell'Africa e dell'America, e nel Recente dell'Asia meridionale e dell'Africa.

8. Fam. *Elephantidae*

19. Subfam. *Mammontinae* (4 gen.: *Archidiskodon* Pohlig, 1888: *Metarchidiskodon* Osborn, 1931; *Parelephas* Osborn, 1924; *Mammonteus* Camper-Osborn, 1788-1924).

Nei gen. *Archidiskodon* e *Metarchidiskodon*, il cranio è brachicefalo, baticefalo, ipsicefalo; le zanne sup. sono grandi, incurvate, e incrociate nei vecchi maschi; molari primitivi, subloxodonti e subipsodonti, con valli molto larghe, smalto ispessito e più o meno crenulato agli orli, e cemento generalmente spesso.

Plioc. medio-Pleistoc. sup.: Eurasia, Africa sud, Amer. nord.

Nel gen. *Parelephas* il cranio è intermedio, per la sua forma, tra *Archidiskodon* e *Mammonteus*; frontali concavi, cresta occipitale elevata; difese notevolmente incurvate; molari con costante aumento delle colline nel 3° molare.

Plioc. sup.-Pleist. sup.: Eurasia e Amer. nord.

Nel gen. *Mammonteus* il cranio è estremamente acrocefalo, ipsicefalo, baticefalo; frontali concavi, cresta occipitale assai elevata, occipite leggermente convesso; zanne sup. molto incurvate, crescenti con l'età; molari a corona larga, estremamente compressa; orli dello smalto più o meno arricciati o sinuosi.

Plioc. sup.-Pleistoc. sup.: Eurasia e Amer. nord.

20. Subfam. *Loxodontinae* (3 gen.: *Loxodonta* F. Cuvier, 1825-27; *Palaeoloxodon* Matsumoto, 1924; *Hesperoloxodon* Osborn, 1931)

Cranio relativamente primitivo, platicefalo, brachicefalo (*Loxodonta*), talvolta più elevato o ipsicefalo (*Palaeoloxodon*, *Hesperoloxodon*); creste parieto-frontali prominenti; rostro premascellare allargato per l'inserzione di zanne divergenti. Zanne relativamente diritte o leggermente incurvate; molari moderatamente ipsodonti, con dilatazione loxodontoide (*Loxodonta*), rudimentale o assente nei gen. *Palaeoloxodon* ed *Hesperoloxodon*. Plioc. sup.-Recente: Eurasia e Africa.

21. Subfam. *Elephantinae* (3 gen.: *Elephas* Linneo, 1735-1758; *Hypselephas* Osborn, 1934; *Platelephas* Osborn, 1934)

Nel gen. *Elephas* il cranio è baticefalo, cirtocefalo, ipsicefalo: le bozze occipito-frontali sono più o meno arrotondate, le frontali leggermente concave; zanne a scarsa curvatura, rostro mandibolare estremamente breve, molari con smalto finemente pieghettato. Pleistoc. sup.-Recente: Asia.

Nel gen. *Hypselephas* il cranio è ipsicefalo, occipite elevato con cresta frontale allargata trasversalmente, frontali assai concavi; zanne relativamente diritte, alquanto divergenti alla base. Corona dei molari bassa. Traccia di dilatazione loxodontoide mediana. Pleistoc. inf.: India.

Nel gen. *Platelephas* il cranio è relativamente allungato, dolicocefalo, platicefalo

Zanne sconosciute, e molari imperfettamente conosciuti. Colline relativamente basse, direttamente trasverse come in *Elephas*. Nessuna traccia di dilatazione loxodontoide.
Plioc. sup. o Pleistoc. inf.: India.

Come si vede dall'elenco che precede, la classificazione dei Proboscidati si è enormemente arricchita e complicata in quest'ultimo secolo. Esponendo, un anno prima della morte, i risultati sommari delle sue ricerche [1]), lo stesso Osborn li aveva definiti «rivoluzionari» rispetto alle precedenti conoscenze. Basta ricordare, infatti, che i *Mastodontoidea* e gruppi affini *(Moeritherioidea* e *Deinotherioidea)*, i quali ai tempi di Darwin comprendevano solo 7 specie appartenenti a 2 generi, sono suddivisi, nell'opera di Osborn, in non meno di 222 specie distribuite in 33 generi; e che gli *Elephantoidea* e *Stegodontoidea*, che nell'anno 1859 sommavano a 10 specie racchiuse tutte nell'unico gen. *Elephas*, vengono distribuiti, in base ai resti presi in esame nella monografia, in 11 generi e 130 specie. Le specie considerate valide sommano dunque, complessivamente, a 352, e di esse 22 sono specie o varietà tuttora viventi. Ma numerose altre vengono ritenute quali sinonimi: sicchè, calcolando tutte quelle descritte dagli autori tra il 1754 e il 1939 e prese in esame dal paleontologo americano o dai suoi collaboratori, si raggiunge il cospicuo numero di 552.

Anche chi non voglia condividere in pieno i criteri, che hanno guidato l'Osborn in questa classificazione, ed ammetta come più verosimile l'ipotesi che parecchie forme da lui considerate distinte possano piuttosto avere il significato di razze, anzichè di vere e proprie specie, specialmente quando faccia difetto una netta separazione morfologica, e consideri che alcuni dei caratteri invocati per stabilire una distinzione generica sono tutt'altro che costanti (dipendendo talvolta, come per esempio nel caso della dilatazione loxodontoide, dal diverso grado di usura del molare), non potrà negare il vasto contributo che quest'opera fondamentale reca alla conoscenza della origine, dello sviluppo e dell'evoluzione polifiletica dei Proboscidati.

Può essere interessante ricordare le specie elencate per l'Italia, che (eliminando quelle di più dubbiosa consistenza) si riducono alle seguenti:

1. *Zygolophodon Borsoni* (Hays), 1834 (= *Mastodon Borsoni* Hays, *M. giganteum* Id.).
Plioc. medio o sup.: Villanuova d'Asti.

2. *Anancus arvernensis* (Croizet e Jobert), 1828 (= *Mastodon arvern.* Cr. e J.).
Plioc. sup.: Olivola (Valdarno), Villafranca d'Asti, Dusino (Asti).

3. *Archidiskodon meridionalis* (Nesti), 1825 (= *Elephas merid.* Nesti).
Plioc. sup. o Pleistoc. inf.: Valdarno sup.

[1]) Osborn H. F., *The thirty-nine distinct lines of Proboscidean descent, and their migration into all parts of the world except Australia*. Proc. Amer. Philos. Soc., vol. LXXIV, n. 4, 1934.

4. *?Archidiskodon planifrons* (Falconer e Cautley), 1846 (= *El. planifrons* Falc. e Cautl.). Plioc. sup.: Valdarno.

5. *Parelephas trogontherioides* (Zuffardi), 1913 (= *El. antiquus* Falc., var. *trogont.* Zuff.). Plioc. sup. o Pleist. inf.: Nizza Monferrato, S. Paolo di Villafranca (Piemonte).

6. *Mammonteus primigenius* (Blumenbach), 1799 (= *El. primig. comune* Issel, 1879). Pleist. inf.: Camporosso, presso Ventimiglia.

7. *Mammonteus primigenius hydruntinus* (Botti), 1891 (= *El. prim.*, var. *hydr.* Botti). Pleistoc.: Grotta Cardamone (Terra d' Otranto).

8. *Mammonteus primigenius astensis* (Dep. e Mayet), 1923 (= *El. prim.*, mut. *ast.* D. e M.). Plioc. sup. o Pleist. inf.: S. Paolo di Villafranca.

9. *Loxodonta Cornaliai* (Aradas), 1870 (= *El. Cornaliae* Aradas). Postplioc. o Quatern.: Monastero S. Chiara (Catania).

10 *Palaeoloxodon Lamarmorai* (Forsyth Major), 1883 (= *El. Lamarm.* F. Major). Pleist.: Morimentu presso Gonnesa (Sardegna).

11. *Palaeoloxodon Falconeri* (Busk), 1867 (= *El. Falconeri* Busk). Pleist.: Sicilia.

12. *Palaeoloxodon melitensis* (Falconer), 1862 (= *El. melitensis* Falc.). Pleist.: Sicilia.

13. *Palaeoloxodon mnaidriensis* (Pohlig), 1893 (= *El. antiquus Melitae* Pohlig). Pleist.: Sicilia.

14. *Hesperoloxodon antiquus ausonius* (Major), 1875, (Verri), 1886, (Depéret e Mayet), 1923 (= *El. ausonius* M. in sch.). Plioc. sup. o Pleist. inf.: Piemonte (S. Paolo di Villafranca), Valdarno (S. Romano, Malafrasca).

15. *Hesperoloxodon antiquus nanus* (Acconci), 1880 (= *El. ant.*, var. *nana* Acconci). Pleist.?: Cucigliana (Monti Pisani).

16. *Hesperoloxodon antiquus italicus* Osborn, 1931 (= *El. antiquus* De Lorenzo e D' Erasmo). Pleist.: Pignataro Interamna (Cassino).

Dall'elenco che precede si desume facilmente come dei vari Proboscidati elencati dall'Osborn per l'Italia la massima parte (6 generi e 14 specie) si riferiscono agli *Elephantoidea*, e due sole specie (spettanti ai gen. *Zygolophodon* e *Anancus*) riguardano *Mastodontoidea*. Tutte provengono da terreni attribuiti al Pliocene sup. o al Pleistocene. Non sono, quindi, annoverate altre forme più antiche di Proboscidati, che, benchè più rare, pure non mancano nel nostro paese: così, ad es., il *Trilophodon angustidens* Cuvier sp., riscontrato nel Miocene di Burgio, in provincia di Girgenti, e di Maglie, in prov. di Lecce; il *Turicius turicensis* Schinz sp., rinvenuto nelle ligniti di M. Bamboli in Toscana e nelle argille lacustri di Gravitelli presso Messina; ed altre ancora [1]).

[1]) Cfr. D' Erasmo G., *Il Tetrabelodon (Trilophodon) angustidens Cuvier sp. della pietra leccese*. Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat., serie 3ª, vol. XXXIV. Napoli, 1928.

Dopo aver dato uno sguardo fugace alla superba monografia dell'Osborn, desidero ora richiamare l'attenzione del lettore su alcuni nuovi reperti di Proboscidati fossili, che, se conosciuti in tempo utile, avrebbero certo avuto in essa, per la loro importanza e buona conservazione, un posto distinto ed una particolare trattazione. Intendo qui sopratutto accennare a due recenti pubblicazioni italiane, che hanno portato un buon contributo di conoscenze, su quest' interessante ordine di mammiferi.

Al prof. Carlo Petrocchi, benemerito studioso della paleontologia libica che dal 1934 al 1939 promosse ed eseguì diligenti ricerche nella zona di Sahabi in Sirtica, individuando un livello a fauna continentale da lui assegnato al Pliocene o al più elevato Miocene e raccogliendovi abbondantissimo materiale appartenente a pesci, rettili e sopratutto mammiferi, si deve un volume [1]), nel quale vengono esposti i risultati delle varie campagne di scavo da lui condotte e sono studiati gli interessantissimi resti di Proboscidati. Questi non solo offrono, infatti, per la maggior parte caratteri che li distinguono dalle forme precedentemente note, ma comprendono altresì rappresentanti di nuovi gruppi caratteristici, di grande importanza per la fi-

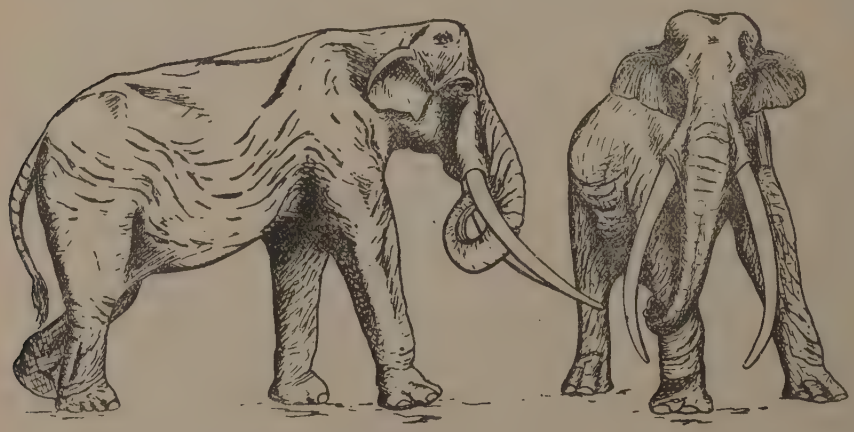


Fig. 1. — Ricostruzione dell' Elefante antico, basata sull' esemplare di Pignataro Interamna (Cassino) illustrato da Osborn col nome di *Hesperoloxodon antiquus italicus*. Aspetto laterale e frontale. Altezza totale calcolata (alla spalla): mm. 3905 (da un disegno di M. Flinsch, 1931; cfr. F. Osborn, *Proboscidea*, vol. II, 1942, pag. 1238, fig. 1092).

logenia dei *Mastodontoidea*. Tale è, ad esempio, il bellissimo teschio di *Stegotetrabelodon syrticus*, che mentre per la forma a losanga delle colline dei molari richiama il gruppo degli Stegolofodonti, per il lungo processo sinfisale della mandibola fornita di poderose zanne ricorda i Mastodonti

[1]) Petrocchi C., *Il giacimento fossilifero di Sahabi*. Coll. scient. e document. a cura del Minist. dell' Africa italiana, vol. XII. Verbania, Airoldi, 1943.

longirostrati. Secondo il Petrocchi, esso, non potendo trovar posto in nessuna delle sottofamiglie create da Osborn, dovrebbe considerarsi come il rappresentante di una subfamiglia nuova *(Stegotetrabelodontinae)*.

Un avanzo di eccezionale interesse è pure lo scheletro elefantino, pressochè completo, che fu rinvenuto, nel luglio 1941, in un deposito di farina fossile della valletta di Fonte Campanile a nord di Viterbo, riferibile al tardo interglaciale Mindel-Rissiano. Il prof. Livio Trevisan, che ne ha dato recentemente una minuta ed accuratissima illustrazione [1]), ha potuto chiaramente dimostrare come si tratti di un individuo, alquanto più giovane di età ma più robusto di dimensioni e di dentatura, e perciò presumibilmente maschio, spettante alla stessa specie di *Elephas antiquus* e alla medesima razza *italicus*, che Osborn aveva primieramente descritta col nome di *Palaeoloxodon antiquus italicus* e poi contraddistinta con la nuova denominazione generica di *Hesperoloxodon*. Tale razza, della quale nelle valli del nostro Appennino sono stati in varie epoche rinvenuti rappresentanti molteplici (dai numerosi resti di molari, di difese e di ossa staccate descritti da O. G. Costa fino al magnifico esemplare di Pignataro Interamna del quale

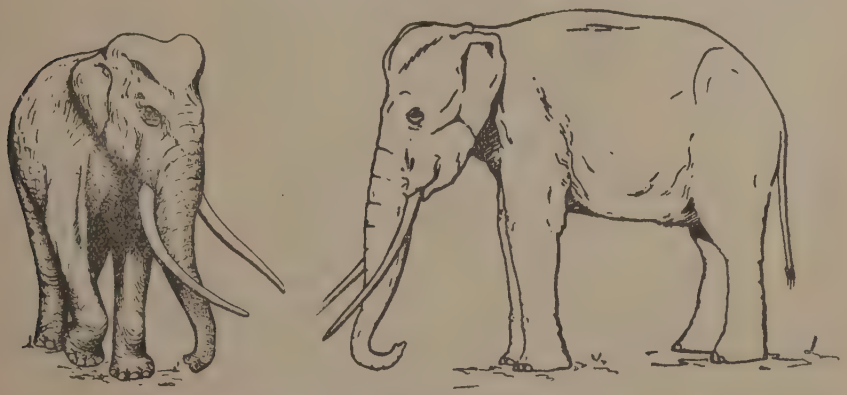


Fig. 2. — Ricostruzione di *Elephas antiquus italicus*, basata sull' esemplare di Fonte Campanile (Viterbo) Aspetto frontale e laterale. Altezza totale calcolata (alla spalla): mm. 3950 (da due schizzi di L. Trevisan, Palaeont. ital., vol. XLIV, 1948, pag. 52, fig. 39, e pag. 55, fig. 42, *a*).

trattarono De Lorenzo, D' Erasmo e Osborn e agli scheletri del sottosuolo di Roma e dintorni illustrati da G. De Angelis d' Ossat), è ora — in base allo studio osteologico compiuto dal Trevisan sopra un individuo eccezionalmente ben conservato — una delle meglio conosciute, non solo nelle sue particolarità scheletriche e nel suo caratteristico aspetto esteriore, ma anche nei rapporti filogenetici con altre forme di elefanti vissute in Italia. Gli

[1]) Trevisan L., *Lo scheletro di Elephas antiquus italicus di Fonte Campanile (Viterbo)*. Palaeontographia italica, vol. XLIV. Pisa, 1948.

annessi schizzi mostrano la ricostruzione dell'esemplare di Pignataro Interamna (fig. 1) eseguita da M. Flinsch nel 1931 sotto la direzione di H. F. Osborn, e quella dell'individuo di Fonte Campanile (fig. 2), fatta dal prof. L. Trevisan nel 1947. Entrambe corrispondono alle antiche figurazioni, che di questa specie ci avevan dato gli artisti paleolitici (fig. 3).

Derivata dal ceppo *meridionalis* come differenziazione adattata alla vita di foresta, la razza italica dell'elefante antico si evolse in posto, assumendo — per l'ambiente particolarmente favorevole del nostro Appennino con largo sviluppo di boschi sempreverdi — più rapidamente che altrove, i caratteri tipici e raggiungendo un grado di specializzazione più elevato; mentre le altre razze, vissute in paesi più nordici (*El. antiquus Andrewsi* di Upnor, *El. antiquus germanicus* di Steinheim a. M., ecc.), si svilupparono con caratteri diversi, in regioni di bosco a foglie caduche, cioè in ambiente meno favorevole alla nutrizione per animali di gran mole mangia-

Fig. 3. — Figurazione preistorica dell'Elefante antico, secondo un dipinto monocromo in rosso eseguito da un artista paleolitico sulla parete della caverna di Pindal (Pimiango) nelle Asturie (cfr. G. De Lorenzo e G. D'Erasmo, *L'uomo paleolitico e l'Elephas antiquus nell'Italia meridionale*. Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. 2., vol. XIX, n. 5, 1932, pag. 100, fig. 38).

tori di foglie. Si tratta, in altre parole, di linee filetiche geograficamente separate tra loro, e distinte più per velocità di evoluzione (determinata dal potere selettivo dell'ambiente) che per caratteri morfologici [1].

---

[1]) Mi piace di accennare ancora a qualche altro recente rinvenimento di avanzi elefantini, che sono pure con ogni probabilità da riferire alla medesima razza. — Nella Campagna Romana, e precisamente in territorio di Rignano Flaminio (dove fin dal secolo scorso erano stati segnalati altri avanzi fossili attribuiti ad *El. antiquus*), i dottori C. Maxia ed A. Ducci hanno annunziato (Boll. Soc. geol. it., vol. LXV, 1946) il ritrovamento, in un conglomerato vulcanico del Pleistocene medio, di alcuni resti frammentari dello scheletro non suscettibili di una precisa determinazione. — Presso Civitella d'Agliano (Viterbo), nella tenuta della famiglia Pollidori, sono stati scavati nella ghiaia fluviale due molari (uno quasi completo ed ancora conficcato in

Concludendo, gli studi moderni sui Proboscidati fossili hanno permesso di stabilire, per quest'ordine di mammiferi, la separazione di parecchie linee filetiche di discendenza e la ricognizione di parecchi Mastodonti ed Elefanti, che pur essendo molto simili in certi caratteri sono tuttavia tanto dissimili in altri caratteri che non è possibile ammettere che siano derivati gli uni dagli altri. Sorti in Africa, probabilmente nel Sopracretacico o nell'Eocene inferiore, essi hanno avuto una lunga esistenza, valutata da Osborn a circa 50.000.000 di anni, e sono, secondo il paleontologo americano, i più prossimi all'uomo per importanza biologica, mentre sorpassano di gran lunga l'uomo, meccanicamente inferiore, nella dimostrazione di tutti i fondamentali principii dell'*aristogenesi biomeccanica* (= comparsa lenta, attraverso lunghi periodi di tempo, di nuove condizioni strutturali aventi valore di adattamento, predeterminate nel plasma germinale) e dell'*alloiometria* (= cambiamenti, relativamente rapidi nella loro evoluzione, determinati dall'influenza delle abitudini sul plasma somatico e non predeterminati nel plasma germinale).

Napoli, Istituto di geologia e paleontologia dell'Università, 4 marzo 1948.

un ramo mandibolare destro, l'altro isolato e più frammentario), cortesemente donati al Museo di Paleontologia di Napoli ed ancora non illustrati. — E nella miniera di lignite di Pofi (Frosinone) sono state messe allo scoperto, nello scorso inverno, oltre a poche ossa mal definibili (una testa di femore, un metatarso [?], ecc.), alcune lamine di molari, che sono attualmente in corso di studio nell'Istituto geo-paleontologico di Napoli e che non si differenziano, nei pochi caratteri rilevabili, dall'*Elephas antiquus italicus* sì largamente diffuso nei depositi pleistocenici dell'Appennino.

Di alcuni sistemi metrici nello spazio a tre dimensioni

Nota di **Ulderico Bencivenga** *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 6 marzo 1948)

Sunto. — Si introducono 4 sistemi metrici nello spazio a tre dimensioni formanti un gruppo generato da una comune origine. Si sviluppa specialmente lo studio di uno di essi esponendo una teoria analoga a quella della trigonometria piana e si accenna in succinto agli altri tre sistemi, annunciando infine la trattazione della rappresentazione geometrica di alcune algebre reali di 3° ordine in rapporto ai 4 sistemi metrici suddetti.

PREMESSA

(1) — Premettiamo quanto segue: [1])

Gli integrali generali di un'equazione differenziale generale lineare di 3° ordine, omogenea, a coefficienti costanti, possono porsi sotto le quattro forme seguenti dipendenti dalla sua caratteristica:

$$\begin{aligned} X &= C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + C_3 e^{w_3 x} \\ X &= C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + C_3 e^{w_3 x} \\ X &= C_1 e^{w_1 x} + (C_2 x + C_3)\, e^{w_2 x} \\ X &= (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{w x} \end{aligned} \qquad (1)$$

essendo rispettivamente:

$$\begin{array}{lll} w_1 = a_1 + a_2 + a_3 & w_2 = a_1 + u_1 a_2 + u_2 a_3 & w_3 = a_1 + u_2 a_2 + u_1 a_3 \\ w_1 = a_1 + a_2 + a_3 & w_2 = a_1 + v_1 a_2 + v_2 a_3 & w_3 = a_1 + v_2 a_2 + v_1 a_3 \\ w_1 = a_1 + 2a & w_2 = a_1 - a & \\ w = a_1 & & \end{array}$$

dove u_1 e u_2 sono le radici cubiche immaginarie dell'unità e v_1 e v_2 i valori che si ottengono da u_1 e u_2 sostituendo ad i l'unità reale [2]).

---

[1]) Da un mio lavoro inedito.

[2]) Dell'argomento ho trattato in generale in una mia Nota su un tipo di algebra di ordine n. (Rend. della Società di Sc. Lett. ed Arti di Napoli, serie 4ª, Vol. XV, 1947). Nel nostro caso 1, v_1, v_2, soddisfano all'equazione $x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$.

Le (1) hanno tutte un teorema di addizione e le loro derivate prime si esprimono linearmente per mezzo delle funzioni stesse. Ponendo nella prima

$$C_1 = \frac{1}{3}(m+n+p) \qquad C_2 = \frac{1}{3}(m+u_1 n+u_2 p) \qquad C_3 = \frac{1}{3}(m+u_2 n+u_1 p)$$

e $\quad C_1 = \frac{1}{3}(m+n+p) \qquad C_2 = \frac{1}{3}(m+v_1 n+v_2 p) \qquad C_3 = \frac{1}{3}(m+v_2 n+v_1 p)$

e nelle altre, le (1) si possono tutte esprimere mediante la relazione

$$X = e^{a_1 x}(mX_1+nX_2+pX_3)$$

Supporremo $a_1 = o$. Allora si avrà, per ciascuna di esse e secondo il loro ordine:

$$X_1 = \frac{1}{3}(e^{(a_2+a_3)x} + e^{(a_2u_1+a_3u_2)x} + e^{(a_2u_2+a_3u_1)x})$$
$$X_2 = \frac{1}{3}(e^{(a_2+a_3)x} + u_1 e^{(a_2u_1+a_3u_2)x} + u_2 e^{(a_2u_2+a_3u_1)x})$$
$$X_3 = \frac{1}{3}(e^{(a_2+a_3)x} + u_2 e^{(a_2u_1+a_3u_2)x} + u_1 e^{(a_2u_2+a_3u_1)x})$$

*

$$X_1 = \frac{1}{3}(e^{(a_2+a_3)x} + e^{(a_2v_1+a_3v_2)x} + e^{(a_2v_2+a_3v_1)x})$$
$$X_2 = \frac{1}{3}(e^{(a_2+a_3)x} + v_1 e^{(a_2v_1+a_3v_2)x} + v_2 e^{(a_2v_2+a_3v_1)x})$$
$$X_3 = \frac{1}{3}(e^{(a_2+a_3)x} + v_2 e^{(a_2v_1+a_3v_2)x} + v_1 e^{(a_2v_2+a_3v_1)x}) \qquad (2)$$

*

$$X_1 = \frac{1}{3}\left[e^{2ax} + (x+1)e^{-ax}\right] \qquad X_2 = \frac{1}{3}\left[e^{2ax} + (v_1 x + v_2)e^{-ax}\right]$$
$$X_3 = \frac{1}{3}\left[e^{2ax} + (v_2 x + v_1)e^{-ax}\right]$$

*

$$X_1 = \frac{1}{3}(1+x+x^2) \qquad X_2 = \frac{1}{3}(1+v_1 x+v_2 x^2) \qquad X_3 = \frac{1}{3}(1+v_2 x+v_1 x^2)$$

Corrispondentemente si hanno le seguenti relazioni fra le $X_1\ X_2\ X_3$:

$$X_1^3+X_2^3+X_3^3 - 3X_1X_2X_3 = 1$$
$$X_1^3 - \frac{X_2^3}{2} - \frac{X_3^3}{2} - \frac{3}{2}X_1(X_2^2+X_3^2) + \frac{3}{2}X_2X_3(X_2+X_3) = 1 \qquad (3)$$
$$(X_1+X_2+X_3)(X_1+v_2X_2+v_1X_3)^2 = 1$$
$$X_1+X_2+X_3 \quad 1$$

Assunte le $X_1\ X_2\ X_3$ come coordinate di punti in un sistema di tre assi ortogonali $X_m\ X_n\ X_p$ e ponendo nel secondo membro il doppio segno, le (3) rappresentano delle superficie, ciascuna delle quali, seguendo il concetto di geometria a metri variabili sviluppati in un mio Trattato [1]), determina un sistema metrico nello spazio a tre dimensioni. Questi quattro sistemi metrici nello spazio fanno riscontro ai tre sistemi metrici nel piano introdotti in una mia Memoria [2]).

Le equazioni (3) possono essere assai semplificate mediante opportuni cambiamenti di assi. Per la prima equazione procediamo così: detti $Y_m\ Y_n\ Y_p$ i nuovi assi, assumiamo l'asse del triedro formato da $X_m\ X_n\ X_p$ come asse positivo delle Y_m. Supposto questo normale al piano della figura, prendiamo gli altri due assi positivi come in essa è indicato. Le formole di trasformazione sono le seguenti:

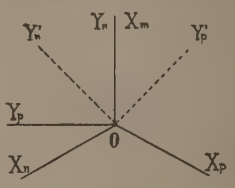


Fig. 1

$$X_1=\frac{Y_1\sqrt{2}+2Y_2}{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}\quad X_2=\frac{Y_1\sqrt{2}-Y_2+Y_3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}\quad X_3=\frac{Y_1\sqrt{2}-Y_2-Y_3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\ \sqrt{3}} \tag{4}$$

Per le altre sostituiamo agli assi $Y_n\ Y_p$ due altri assi positivi $Y''_n\ Y''_p$ girati di 45° rispetto ai primi, come è indicato in figura. Le formole di trasformazione sono:

$$X_1=\frac{Y_1+Y_2+Y_3}{\sqrt{3}}\quad X_2=\frac{Y_1+v_1Y_2+v_2Y_3}{\sqrt{3}}\quad X_3=\frac{Y_1+v_2Y_2+v_1Y_3}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

Le (3) divengono allora, ponendo il doppio segno:

$$\begin{gathered}\frac{3\sqrt{3}}{2}\,Y_1(Y_2^2+Y_3^2)=\pm 1\\ 3\sqrt{3}\ Y_1\ Y_2'\ Y_3'=\pm 1\\ 3\sqrt{3}\ Y_1\ Y_3'^2=\pm 1\\ \sqrt{3}\ Y_1=\pm 1\end{gathered} \tag{6}$$

Svolgeremo più compiutamente il sistema metrico determinato dalla prima delle (6), a proposito del quale avremo occasione di esporre una teoria analoga alla trigonometria piana, mentre diremo in succinto degli altri tre sistemi.

---

[1]) « *Geometria e Trigonometria iperboliche e fondamenti di una Geometria a metri variabili* ». Roma, 1940. Presso l'A., Viale di Villa Massimo, 24, Roma.

[2]) « *Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo* ». Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Vol. II, Serie 3ª, N. 7.

CAPITOLO I.

(2) — Esaminiamo dunque il sistema metrico definito dalla superficie

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - 3\,X_1 X_2 X_3 = \pm 1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\,Y_1\,(Y_2^2 + Y_3^2) = \pm 1$$

Le funzioni $X_1\ X_2\ X_3$ sono le prime delle (2). Un caso particolare di queste si ottiene ponendo $a_2 = 1\ a_3 = o$, con che si ha:

$$X_1' = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{u_1 x} + e^{u_2 x}\right) \qquad X_2' = \frac{1}{3}\left(e^x + u_1 e^{u_1 x} + u_2 e^{u_2 x}\right)$$
$$X_3' = \frac{1}{3}\left(e^x + u_2 e^{u_1 x} + u_1 e^{u_2 x}\right) \tag{7}$$

Chiameremo *elementari* queste funzioni in quanto con esse possono esprimersi $X_1\ X_2\ X_3$. Infatti è facile verificare che:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1'(x_2)\,X_1'(x_3) + X_2'(x_2)\,X_2'(x_3) + X_3'(x_2)\,X_3'(x_3) \\ X_2 &= X_2'(x_2)\,X_1'(x_3) + X_3'(x_2)\,X_2'(x_3) + X_1'(x_2)\,X_3'(x_3) \\ X_3 &= X_3'(x_2)\,X_1'(x_3) + X_1'(x_2)\,X_2'(x_3) + X_2'(x_2)\,X_3'(x_3) \end{aligned} \tag{8}$$

avendo posto nelle (7) per x i valori $x_2 = a_2 x\ \ x_3 = a_3 x$.

Queste funzioni elementari, sviluppate in serie, danno:

$$X_1' = \sum_0^\infty \frac{x^{3n}}{3n!} \qquad X_2' = \sum_0^\infty \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} \qquad X_3' = \sum_0^\infty \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} \tag{9}$$

Per le funzioni $X_1\ X_2\ X_3$ vale il seguente teorema di addizione:

$$\begin{aligned} X_1(x+y) &= X_2(x)\,X_3(y) + X_3(x)\,X_2(y) + X_1(x)\,X_1(y) \\ X_2(x+y) &= X_1(x)\,X_2(y) + X_2(x)\,X_1(y) + X_3(x)\,X_3(y) \\ X_3(x+y) &= X_3(x)\,X_1(y) + X_1(x)\,X_3(y) + X_2(x)\,X_2(y) \end{aligned}$$

Le derivate prime si esprimono linearmente mediante le funzioni stesse. Nel caso delle funzioni elementari si ha:

$$\frac{dX_1'}{dx} = X_2' \qquad \frac{dX_2'}{dx} = X_3' \qquad \frac{dX_3'}{dx} = X_1' \tag{10}$$

cioè la derivata prima di una funzione elementare dà una delle funzioni stesse.

Vediamo ora la forma della superficie dei metri. Dalla sua equazione in Y si vede che essa è una superficie di rotazione di asse Y_m della quale questo e il piano $Y_n\,OY_p$ sono rispettivamente l'asse e il piano assintotico. La sezione rappresentata in figura è fatta mediante il piano $Y_m\,OY_n$ e la sua equazione è:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\,Y_1\,Y_2^2 = \pm 1$$

Essa può ottenersi trasformando due parabole opposte di asse Y_m e di vertice O prendendo le inverse delle ordinate Y_m.

In coordinate polari la sua equazione è:

$$OP = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}\,(\operatorname{sen} 2\alpha \cos\alpha)^{\frac{1}{3}}} \qquad (11)$$

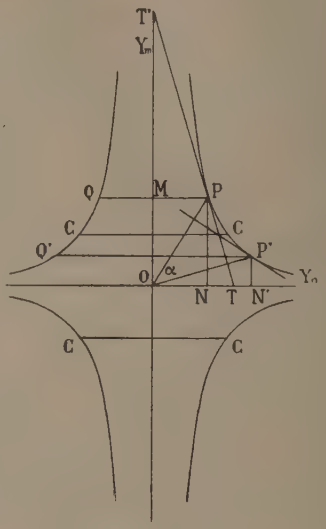


Fig. 2

Gli assi Y_m e Y_n sono due assintoti della curva.

Elenchiamo qui appresso alcune proprietà della curva stessa:

1° — Conducendo la tangente alla curva all'estremità di un vettore qualunque OP, si ha: $ON = 2NT$ $PT' = 2PT$.

2° — L'area compresa fra un'ordinata PN e la curva fino al punto all'∞ dall'asse Y_n è uguale all'area del rettangolo $OMPN$.

3° — L'area compresa fra due orizzontali PQ e $P'Q'$ poste a distanza Y_1 e Y_1' dall'asse Y_n è quadrupla di quella compresa fra le ordinate condotte per P e P'.

Passiamo ora in rassegna alcune proprietà della superficie dei metri:

1° — Essa è il luogo dei cerchi base dei coni di vertice O, di asse Y_m, aventi lo stesso volume.

2° — Il volume del parallelepipedo formato dalle coordinate Y dei punti giacenti su di una stessa generatrice è costante.

3° — La somma delle coordinate X è costante per tutti i punti di un parallelo, e così pure la superficie del parallelepipedo da esse formato.

4° — Il volume del solido racchiuso dalla superficie e compreso fra due sezioni orizzontali poste risp. a distanza Y_1 e Y_1' dal piano assintotico ha il valore $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,lg.\,\frac{Y_1'}{Y_1}$ ed equivale al volume che si ottiene proiettando dall'origine la fascia di superficie compresa fra le due sezioni.

Chiameremo *polo* di un piano passante per l'origine il punto di con-

tatto del piano tangente alla superficie parallelo al dato, e *vettore coniugato* al piano stesso il vettore del polo.

Chiameremo *direzione coniugata di un piano* qualunque nello spazio quella del vettore coniugato al piano condotto per l'origine parallelamente al piano dato.

Si dimostra che, affinchè tre piani siano tali che l'intersezione di due di essi sia coniugata al terzo, essi debbono formare un triedro regolare con l'asse parallelo ad Y_m.

L'equazione del piano il cui polo P ha le coordinate $X_1 X_2 X_3$, tenuto presente che le derivate parziali dell'equazione della superficie hanno i valori $3(X_1^2 - X_2X_3)$ $3(X_2^2 - X_1X_3)$ $3(X_3^2 - X_1X_2)$, è:

$$\xi_1(X_1^2 - X_2X_3) + \xi_2(X_2^2 - X_1X_3) + \xi_3(X_3^2 - X_1X_2) = 0$$

Conducendo per O la normale a questo piano è facile trovare che il punto P' d'incontro di essa con la superficie ha le coordinate:

$$Z_1 = X_1^2 - X_2X_3 \qquad Z_2 = X_2^2 - X_1X_3 \qquad Z_3 = X_3^2 - X_1X_2 \qquad (12)$$

dalle quali si ricavano le relazioni reciproche:

$$X_1 = Z_1^2 - Z_2Z_3 \qquad X_2 = Z_2^2 - Z_1Z_3 \qquad X_3 = Z_3^2 - Z_1Z_2$$

Ne segue che: *il piano normale al vettore coniugato di un dato piano ha per vettore coniugato la normale a quest'ultimo e viceversa.*

I due piani, i due vettori e i due poli si diranno *reciproci*.

Le equazioni dei piani i cui poli hanno le coordinate $X_1X_2X_3$ e $Z_1Z_2Z_3$ si potranno scrivere:

$$\xi_1 Z_1 + \xi_2 Z_2 + \xi_3 Z_3 = 0 \qquad \xi_1' X_1 + \xi_2' X_2 + \xi_3' X_3 = 0$$

Sussiste poi la relazione:

$$X_1 Z_1 + X_2 Z_2 + X_3 Z_3 = 1 \qquad (13)$$

(3) — Se in $X_1X_2X_3$ poniamo $\frac{a_2 + a_3}{2} = P$ $\frac{(a_2 - a_3)\sqrt{3}}{2} = Q$ $\frac{P}{Q} = \rho$ $Qx = \gamma$, le prime delle (2) divengono:

$$X_1 = \frac{1}{3}\left[e^{-2\rho\gamma} + 2e^{\rho\gamma}\cos\gamma\right] \qquad X_2 = \frac{1}{3}\left[e^{-2\rho\gamma} - 2e^{\rho\gamma}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)\right]$$

$$X_3 = \frac{1}{3}\left[e^{-2\rho\gamma} - 2e^{\rho\gamma}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\right] \qquad (14)$$

cui corrispondono nel sistema d'assi $Y_m\ Y_n\ Y_p$ le funzioni:

$$Y_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-2\rho\gamma} \qquad Y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{\rho\gamma}\, cos\gamma \qquad Y_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{\rho\gamma}\, sen\gamma \qquad (15)$$

Dalle due ultime relazioni, indicando con r la proiezione sul piano assintotico del vettore di un punto generico P si ha:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{\rho\gamma} \qquad (16)$$

Se immaginiamo fissato ρ, questa equazione rappresenta una spirale logaritmica in cui γ è l'angolo formato dal vettore r con un vettore fisso. Per un dato valore di ρ il punto $(Y_1\ Y_2\ Y_3)$, al variare di γ, percorre sulla superficie una curva spiraliforme che chiameremo *spiraloide*.

Diremo caratteristica di esso la quantità ρ. Se $\rho = O$ si ha un cerchio. Oltre quello cui abbiamo accennato, la quantità γ ha anche altri significati geometrici:

1° — Se nella espressione $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\, lg.\, \frac{Y_1'}{Y_1}$ che dà il volume del solido racchiuso dalla superficie e compreso fra due sezioni orizzontali, poniamo per Y_1 il valore dato dalla prima delle (15), avremo $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\, \rho\, (\gamma - \gamma_1)$. Per $\gamma_1 = O$, cioè per $Y_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}$, sarà $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\, \rho\gamma$. Considerato come misura dell'angolo diedro formato da un piano meridiano fisso ed uno variabile passante per un punto di uno spiraloide di caratteristica ρ, γ è dunque quantità proporzionale al volume che si ottiene proiettando dall'origine la fascia di superficie compresa fra la sezione fissa posta a distanza $\frac{1}{\sqrt{3}}$ dal piano assintotico e la sezione variabile corrispondente al punto suddetto.

2° — Si dimostra che γ è quantità proporzionale al volume generato dalla rotazione intorno all'asse Y_m di un triangolo rettangolo variabile che abbia un vertice fisso nell'origine, uno dei cateti coincidenti con l'asse Y_m e l'altro vertice scorrente lungo lo spiraloide.

Poichè per $\gamma = O$ si ha $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $Y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $Y_3 = O$, si deduce che tutti gli spiraloidi passano per il punto di tali coordinate, che è quello posto sull'asse X_m a distanza *uno* dall'origine.

Due spiraloidi di caratteristiche ρ_1 e ρ_2 si tagliano in infiniti punti e i piani meridiani passanti per essi stanno a distanze angolari uguali a $\frac{2\pi\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$.

Se nelle posizioni fatte in principio si suppone $a_2 = 1$ $a_3 = o$. si ha $\rho = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Lo spiraloide di questa caratteristica ha per proiezione sul piano assintotico una spirale logaritmica nella quale i vettori formano con la tangente nel loro estremo l'angolo di 60°. Si dimostra che il piano osculatore in qualsiasi punto di questo spiraloide coincide col piano tangente alla superficie dei metri, cioè questa curva è una linea assintotica della superficie stessa. La chiameremo *spiraloide principale*. Di questa esporremo nel numero seguente alcune importanti proprietà che avvicinano la teoria che stiamo svolgendo a quella delle funzioni circolari nel piano.

Delle famiglie di spiraloidi più generali possono ottenersi prendendo per loro proiezioni sul piano assintotico la spirale $r = ae^{\rho\gamma}$. Questa equazione, contenendo le due quantità arbitrarie a e ρ, permette di determinare uno spiraloide passante per due punti della superficie. Infatti se r_1, γ_1 ed r_2, γ_2 sono i raggi dei paralleli e gli angoli dei meridiani dei due punti, si ha $\rho = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} lg \frac{r_1}{r_2}$ ed $a = r_1^{\frac{-\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2}} r_2^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}}$. Se $Y_1\ Y_2\ Y_3$ sono le coordinate di uno dei punti, si ha poi:

$$Y_1 = a_1 e^{-2\rho\gamma_1} \qquad Y_2 = ae^{\rho\gamma_1}\cos\gamma_1 \qquad Y_3 = -ae^{\rho\gamma_2}\,sen\,\gamma_1$$

dove a_1 è dato dall'uguaglianza $\frac{3\sqrt{3}}{2} a_1 a^2 = \pm 1$.

(4) — Passiamo ora ai dettagli del sistema metrico definito dalla superficie studiata sopra. Conformandoci alla definizione data nel mio volume sulla geometria a metri variabili, diremo *modulo* di un segmento qualunque nello spazio il valore assoluto del rapporto fra la sua lunghezza e quella del vettore della superficie dei metri condotto parallelamente ad esso nel senso della sua generazione. Se $a_1\ a_2\ a_3$ sono le coordinate dell'estremo del vettore condotto dall'origine parallelamente al segmento dato e della sua lunghezza e senso, e $X_1 X_2 X_3$ le coordinate del suo punto d'incontro con la superficie dei metri, detto ∂ il modulo, si avrà: $X_1 = \frac{a_1}{\partial}$ $X_2 = \frac{a_2}{\partial}$ $X_3 = \frac{a_3}{\partial}$. Poichè $X_1 X_2 X_3$ soddisfano all'equazione della superficie dei metri, sarà:

$$\partial = \sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1 a_2 a_3} \qquad (17)$$

preso il secondo membro nel suo valore assoluto.

Usando invece il sistema di assi $Y_m\ Y_n\ Y_p$, se $b_1\ b_2\ b_3$ sono le coordi-

nate corrispondenti ad $a_1\, a_2\, a_3$ sarà:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{2}\, b_1\,(b_2^2 + b_3^2)} \qquad (18)$$

Il modulo di un elemento lineare infinitesimo tracciato sulla superficie dei metri sarà, per quest'ultima formola:

$$mod.\ ds = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{2}\, dY_1\,(dY_2^2 + dY_3^2)}$$

o, per le (15):

$$mod.\ ds = \sqrt[3]{2d(\rho\gamma)\left[\overline{d(\rho\gamma)}^2 + \overline{d\gamma}^2\right]} \qquad (19)$$

Esaminiamo due casi particolari:

1° — ρ costante. Si avrà:

$$mod.\ ds_1 = \sqrt{2\rho(1+\rho^2)}\, d\gamma \qquad mod.\ s_1 = \sqrt{2\rho(1+\rho^2)}\,(\gamma - \gamma_0).$$

2° — γ costante. Sarà: $mod.\ ds_2 = \sqrt[3]{2}\,\gamma d\rho$ $\quad mod.\ s_2 = \sqrt[3]{2}\,\gamma\,(\rho - \rho_0)$

Contando gli archi dello spiraloide a partire dal punto determinato da $\gamma_0 = O$, che è quello di coordinate $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad Y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad Y_3 = O$, cioè il puntó d'incontro dell'asse X_m con la superficie, si avrà:

$$mod\ s_1 = \sqrt{2\rho(1+\rho^2)}\,\gamma \qquad (20)$$

Contando gli archi della curva meridiana dal punto determinato da $\rho_0 = O$, cioè dal punto d'incontro della curva meridiana posta a distanza angolare γ col cerchio passante per i tre punti a distanza *uno* dall'origine sugli assi $X_m X_n X_p$ si avrà:

$$mod\ s_2 = \sqrt[3]{2}\,\rho\gamma \qquad (21)$$

Chiameremo *cerchio fisso* quello ora menzionato. Due saranno questi cerchi e posti simmetricamente al piano assintotico. Essi divideranno tutti gli spiraloidi e meridiani in due parti che fanno capo ai punti dai quali, come abbiamo detto, vengono computati gli archi. Converremo di dare un segno a ciascuna delle due porzioni nelle quali queste curve vengono divise dai cerchi fissi, e precisamente:

1° — Daremo il segno + agli archi che vanno dai cerchi suddetti verso i punti all'∞ dell'asse assintotico.

2° — Daremo il segno — agli archi che vanno da questi cerchi verso il piano assintotico.

Oltre ai segni bisognerà, per la identificazione degli archi, indicare a quale delle due falde della superficie essi appartengono.

Prima di procedere vogliamo rilevare una proprietà che si ricava subito dalle (20) e (21). Per uno stesso spiraloide ρ è costante. Risulta quindi dalle formole stesse che i moduli degli archi di spiraloide e di meridiano sono proporzionali a γ ed il loro rapporto è costante. Tale proprietà richiama quella analoga dell'elica cilindrica.

Ritornando in argomento, per stabilire l'orientazione di un segmento nello spazio si adotteranno le seguenti *misure* relative al vettore della superficie dei metri condotto parallelamente e nel senso di quello dato:

1° — Angolo circolare γ formato dal piano meridiano passante per l'asse X_{∞} con il piano meridiano passante per l'estremo del vettore anzidetto. Questo angolo sarà considerato positivo se generato in senso destrorso nel piano assintotico visto da un punto dell'asse assintotico positivo.

2° — Modulo μ dell'arco di meridiano passante per detto estremo, contato a partire dal punto d'incontro del meridiano col cerchio fisso e con il segno sopra convenuto. Insieme al valore del modulo dovrà indicarsi la falda della superficie alla quale esso si riferisce.

Chiameremo *coppia elementare* l'ente geometrico costituito da un vettore qualunque della superficie dei metri con l'asse X_{∞}. Diremo misura dell'angolo o semplicemente *angolo* di questa coppia l'insieme delle quantità μ e γ. Indicheremo la coppia col simbolo $(\mu\gamma)_+$ o $(\mu\gamma)_-$ secondo che il vettore anzidetto incontra la falda della superficie il cui asse è quello assintotico positivo o la falda opposta.

Introducendo la μ, le funzioni (14) e (15) divengono:

$$X_1 = \frac{1}{3}\left[\pm e^{2a_0\mu} + 2e^{-a_0\mu}\cos\gamma\right] \qquad X_2 = \frac{1}{3}\left[\pm e^{2a_0\mu} - 2e^{-a_0\mu}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)\right]$$

$$X_3 = \frac{1}{3}\left[\pm e^{2a_0\mu} - 2e^{-a_0\mu}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\right] \qquad (22)$$

$$Y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}e^{2a_0\mu} \qquad Y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-a_0\mu}\cos\gamma \qquad Y_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-a_0\mu}\operatorname{sen}\gamma$$

avendo posto $a_0 = \mp 2^{-\frac{1}{3}}$, il doppio segno corrispondendo a quello del primo termine dei polinomi in parentesi. Il quale segno è + quando il vettore generico incontra la falda della superficie il cui asse è quello assintotico positivo ed è — quando incontra la falda opposta.

Sostituendo μ e γ nelle formole (12) che legano le coordinate di due punti reciproci, si ha:

$$Z_1 = \pm X_1(-\mu, \gamma) = \pm X_1(-\mu, -\gamma)$$
$$Z_2 = \pm X_2(-\mu, \gamma) = \pm X_3(-\mu, -\gamma)$$
$$Z_3 = \pm X_3(-\mu, \gamma) = \pm X_2(-\mu, -\gamma)$$

Da queste formole si deduce:

1° — Gli estremi di due vettori reciproci sono situati sullo stesso meridiano da parti opposte rispetto al punto d'incontro di esso col cerchio fisso e in posizione tale che i moduli degli archi corrispondenti sono uguali.

2° — Considerando gli spiraloidi passanti per due punti reciproci, poichè γ è il medesimo, per effetto della (21) sarà uguale anche il valore di ρ_0 e allora, per la (20), si avrà che i moduli degli archi di spiraloide compresi fra il cerchio fisso e il meridiano su cui stanno i punti reciproci sono uguali.

A questo punto vogliamo esporre alcune proprietà importanti dello spiraloide principale che valgono a porre in rilievo l'analogia fra la teoria che stiamo trattando e quella delle funzioni circolari nel piano.

Introduciamo il modulo dell'arco di un suo punto. Per averlo basterà applicare la formola (20) facendovi $\rho = \rho_0$ $\left(\rho_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Chiamandolo ν, si ha facilmente $\nu = -2\rho_0\gamma$. Le (14) divengono allora:

$$X_1' = \frac{1}{3}\left[e^{\nu} + 2e^{-\frac{\nu}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\nu\right] \qquad X_2' = \frac{1}{3}\left[e^{\nu} - 2e^{-\frac{\nu}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\nu\right)\right]$$

$$X_3' = \frac{1}{3}\left[e^{\nu} - 2e^{-\frac{\nu}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\nu\right)\right]$$

ovvero sotto la forma (7):

$$X_1' = \frac{1}{3}\left(e^{\nu} + e^{u_1\nu} + e^{u_2\nu}\right) \qquad X_2' = \frac{1}{3}\left(e^{\nu} + u_1 e^{u_1\nu} + u_2 e^{u_2\nu}\right)$$

$$X_3' = \frac{1}{3}\left(e^{\nu} + u_2 e^{u_1\nu} + u_1 e^{u_2\nu}\right)$$

Invece dell'argomento ν si può evidentemente porre l'argomento μ valendosi delle relazioni $\nu = -2\rho_0\gamma$ e $\mu = -\frac{1}{a_0}\rho_0\gamma$, da cui $\nu = 2a_0\mu$.

È facile ora rilevare l'analogia cui abbiamo sopra accennato. Infatti:

1° — Le serie (9), sviluppi delle (7), hanno grande simiglianza con quelle delle funzioni circolari e questa simiglianza si estende alla proprietà relativa alle loro derivate prime espresse dalle (10).

2° — Lo spiraloide principale può essere efficacemente messo a raffronto col cerchio di raggio *uno*. Come il seno ed il coseno circolari, coordinate di un punto del cerchio, sono funzioni esponenziali di un suo arco, contato a partire da un punto fisso, così le funzioni X', coordinate di un punto dello spiraloide principale, sono pure funzioni esponenziali analoghe del modulo di un suo arco contato a partire da una certa origine.

Dato un punto P della superficie dei metri posto sul meridiano determinato dal valore angolare γ, ad esso corrispondono due punti dello spiraloide principale tali che le coordinate di P possono esprimersi in funzione delle coordinate di questi punti mediante le relazioni (8). Infatti: Dalle posizioni del n. 3 si ha $a_2 x - x_2 = -\rho\gamma + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma$ $a_3 x = x_3 \quad -\rho\gamma - \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma$, essendo x_2 e x_3 gli argomenti che figurano nelle (8). Ora $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ è la caratteristica ρ_o dello spiraloide principale e quindi si ha $x_2 = -(\rho + \rho_o)\gamma$ $x_3 = -(\rho - \rho_o)\gamma$. Consideriamo ora x_2 e x_3 come moduli degli archi di spiraloide principale dei due punti suddetti. Chiamando ν_1 e ν_2 questi moduli e γ_1, γ_2 gli angoli dei meridiani corrispondenti ad essi, poichè $\nu_1 = -2\rho_o\gamma_1$ $\nu_2 = -2\rho_o\gamma_2$, dovrà aversi $2\rho_o\gamma_1 = (\rho + \rho_o)\gamma$ e $2\rho_o\gamma_2 = (\rho - \rho_o)\gamma$, e pertanto $\gamma_1 = \frac{\rho + \rho_o}{2\rho_o}\gamma$ $\gamma_2 = \frac{\rho - \rho_o}{2\rho_o}\gamma$. Così restano determinati i meridiani dei punti dello spiraloide principale corrispondenti a P.

Dalle relazioni ora trovate si ha subito $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ $\nu_1 - \nu_2 = -2\rho_o(\gamma_1 - \gamma_2) = -2\rho_o\gamma = \nu$ essendo ν il modulo d'arco di spiraloide tagliato su questo dal meridiano passante per P.

Chiameremo *coppia* in generale l'ente geometrico costituito da un vettore che diremo *primario* con un altro che diremo *secondario* ed *angolo della coppia* la differenza fra l'angolo della coppia elementare formata dal primario e quello della coppia analoga formata dal secondario. Indicando con (μ_1, γ_1) la prima e con (μ_2, γ_2) la seconda (r, s indicatrici generiche del segno) la coppia ora definita si indicherà col simbolo $\mu_1 - \mu_2, \gamma_1 - \gamma_2)_t$ dove t è uguale al prodotto rs dei segni. La diremo *ridotta all'asse* X_m.

Elenchiamo qui appresso i diversi tipi di coppie:

1° — Una coppia che abbia i vettori sulla stessa retta ma diretti in senso opposto si dirà *piatta*. L'angolo ridotto all'asse X_m avrà per simbolo $(O, \pm\pi)$. Il segno di π dipende dal vettore scelto come primario.

2° — Diremo *invertita* una coppia rispetto ad un'altra quando sia ottenuta da questa scambiando il primario col secondario. I simboli degli angoli rispettivi saranno (μ, γ) e $(-\mu, -\gamma)$.

3° — Si diranno *opposte* due coppie i cui vettori siano sulle stesse rette ma diretti in senso opposto. Sono da considerare due casi: quando i primari sono sulla stessa retta, i simboli degli angoli rispettivi differiscono solo per il segno della falda; quando sono invece su rette diverse, una coppia è anche l'invertita dell'altra.

4° — Si diranno *reciproche* due coppie in cui tanto i primari che i secondari sono vettori reciproci.

5° — Chiameremo *affiancate* due coppie aventi un vettore comune che sia secondario per l'una e primario per l'altra.

6° — Chiameremo *supplementari* due coppie affiancate i cui vettori non comuni siano sulla stessa retta. La somma dei loro angoli dà in questo caso $(O, \pm\pi)$, cioè l'angolo di una coppia piatta.

7° — Si diranno *complementari* le tre coppie aventi il vettore secondario comune e i vettori primari tali da formare gli spigoli di un triedro regolare il cui asse sia parallelo all'asse Y_m. Gli angoli di queste coppie hanno lo stesso μ, mentre i γ differiscono di $\frac{2\pi}{3}$.

8° — Diremo *semi-diedro normale* l'ente formato da un piano e dalla retta ad esso coniugata. Esso equivale alla coppia formata da due vettori coincidenti, cioè da una coppia nulla il cui angolo ha il simbolo (O, O).

I valori delle funzioni X relative ad una coppia qualunque si possono esprimere mediante i valori delle funzioni X e Z delle coppie elementari.

Ponendo:

$$X_1(\mu_1-\mu\ ,\ \gamma_1-\gamma) = V_1 \qquad X_2(\mu_1-\mu\ ,\ \gamma_1-\gamma) = V_2 \qquad X_3(\mu_1-\mu\ ,\ \gamma_1-\gamma) = V_3$$

si ha:

$$\begin{aligned} V_1 &= s\,[\,X_1(\mu_1\gamma_1)_r Z_1(\mu\gamma)_s + X_2(\mu_1\gamma_1)_r Z_2(\mu\gamma)_s + X_3(\mu_1\gamma_1)_r Z_3(\mu\gamma)_s\,] \\ V_2 &= s\,[\,X_2(\mu_1\gamma_1)_r Z_1(\mu\gamma)_s + X_3(\mu_1\gamma_1)_r Z_2(\mu\gamma)_s + X_1(\mu_1\gamma_1)_r Z_3(\mu\gamma)_s\,] \\ V_3 &= s\,[\,X_3(\mu_1\gamma_1)_r Z_1(\mu\gamma)_s + X_1(\mu_1\gamma_1)_r Z_2(\mu\gamma)_s + X_2(\mu_1\gamma_1)_r Z_3(\mu\gamma)_s\,] \end{aligned} \tag{23}$$

A queste funzioni si può dare una semplice interpretazione geometrica.

Se alle Z si sostituiscono i valori dati dalla (12) e si distinguono con un apice le funzioni X della coppia elementare $(\mu_1\ \gamma_1)$, si avrà:

$$V_1 = \begin{vmatrix} X_1' & X_2' & X_3' \\ X_3 & X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_1 \end{vmatrix} \qquad V_2 = \begin{vmatrix} X_2' & X_3' & X_1' \\ X_3 & X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_1 \end{vmatrix} \qquad V_3 = \begin{vmatrix} X_3' & X_1' & X_2' \\ X_3 & X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_1 \end{vmatrix} \tag{24}$$

Questi determinanti rappresentano il sestuplo dei volumi di tre tetraedri con un vertice nell'origine. Due altri dei loro vertici, e precisamente quelli di coordinate $X_3 X_1 X_2$ e $X_2 X_3 X_1$, sono comuni; il restante varia ed ha rispettivamente le coordinate $X_1' X_2 X_3'$, $X_2' X_3' X_1'$, $X_3' X_1' X_2'$, corrispondenti al vettore primario.

Costruiamo due triedri regolari di asse Y_m col vertice nell'origine; uno avente per spigolo il vettore primario e l'altro quello secondario. Prolunghiamo i lati dei triedri fino ad incontrare la superficie dei metri e consideriamo i due tetraedri che si vengono così a formare. Le coordinate $X_1' X_2' X_3'$, $X_2' X_3' X_1'$, $X_3' X_1' X_2'$, saranno quelle dell'estremo del vettore primario e degli altri due vertici del primo tetraedro, mentre le coordinate $X_3 X_1 X_2$ e $X_2 X_3 X_1$ saranno quelle dei due vertici del secondo tetraedro, escluso l'estremo del vettore secondario. I tetraedri, i cui volumi sono proporzionali al valore dei determinanti, hanno dunque una faccia comune, che è quella del triangolo formato dall'origine e dai due vertici

del secondo tetraedro oltre quello determinato dal vettore secondario e il quarto vertice rispettivamente in ciascuno dei vertici del primo tetraedro.

Vogliamo qui porre in rilievo la grande analogia delle funzioni $V_1\ V_2\ V_3$ con le funzioni circolari od iperboliche, ad es. con le prime:

1° — Se poniamo $sen\,\alpha = V_1$ e $cos\,\alpha = V_2$, poichè $cos\,\alpha = sen\,(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, possiamo dire che la funzione V_2 di α è uguale alla funzione V_1 di $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Analogamente nello spazio si ha che la funzione V_2 della coppia formata dal vettore del punto $X_1\ X_2\ X_3$ con il vettore del punto $X_1'\ X_2'\ X_3'$, è uguale alla funzione V_1 della coppia formata dal vettore del punto $X_1\ X_2\ X_3$ con quello del punto $X_2'\ X_3'\ X_1'$, e la funzione V_3 è uguale alla funzione V_1 della coppia formata dal vettore del punto $X_1\ X_2\ X_3$ con quello del punto $X_3'\ X_1'\ X_2'$. Queste coppie sono dunque paragonabili agli angoli complementari delle funzioni circolari e si potrà applicar loro lo stesso appellativo Inoltre, come per le funzioni circolari si ha $V_1^2 + V_2^2 = 1$, cioè l'equazione del cerchio, che è poi la curva dei metri nel relativo sistema metrico, per le funzioni $V_1\ V_2\ V_3$ si ha $V_1^3 + V_2^3 + V_3^3 - 3V_1V_2V_3 = \pm 1$, cioè la superficie dei metri nel sistema del quale stiamo trattando.

2° — Nella mia Trig. ip. (Capo III n. 67) misi in rilievo che il seno circolare poteva definirsi come l'area triangolare formata da due vettori del cerchio di raggio *uno* e dalla congiungente i loro estremi, espressa in funzione dell'area del settore circolare da essi determinato, e il coseno circolare come l'area triangolare ottenuta introducendo il vettore coniugato che determina l'angolo complementare. Prendiamo ora in esame, ad es., la funzione V_1 di una coppia nello spazio. Invece di un'area triangolare abbiamo quì il volume di un tetraedro di cui uno spigolo è dato dal vettore primario e gli altri due da quelli del triedro regolare costruito sul vettore secondario della coppia, questo escluso; spigoli che potremo chiamare *complementari* di quest'ultimo. Le funzioni V_2 e V_3 saranno date dai tetraedri che si ottengono sostituendo al primario i suoi vettori complementari. Orbene, anche in questo caso esiste qualche cosa di analogo all'area del settore circolare del quale il seno è funzione.

Sia R (v. appresso fig. 3) l'estremo del vettore primario della coppia e P e Q gli estremi dei vettori complementari del vettore secondario, i quali ultimi sono evidentemente su di uno stesso cerchio, a distanza angolare $\frac{2\pi}{3}$.

Conduciamo gli spiraloidi passanti per P e R e per Q e R. Abbiamo visto al n. 3 che ciò è sempre possibile. Si dimostra allora che il volume che si ottiene proiettando da O il triangolo mistilineo PQR è dato da $\frac{a_0}{3\sqrt{3}}(\mu_1 - \mu_2)(\gamma_1 - \gamma_2)$ dove μ_1 è il modulo corrispondente a P e Q e μ_2 quello corrispondente a R; γ_1 l'angolo corrispondente a P e γ_2 quello

corrispondente a R. Essendo $\gamma_1 - \gamma_2 = \frac{2\pi}{3}$, questo volume è espresso da $\frac{2\pi a_0}{3\sqrt{3}}(\mu_1 - \mu_2)$. Dalle (23) si ricava quindi che $V_1\ V_2\ V_3$, possono considerarsi funzioni di questo volume.

Terminiamo questa parte che tratta specialmente degli spiraloidi rilevando che essi rappresentano nello spazio ciò che sono le spirali logaritmiche nel piano. Sussiste infatti per i primi la caratteristica delle seconde riguardante la costanza dell'angolo formato dai vettori di esse con la tangente nel loro estremo. Consideriamo infatti la coppia generica formata dal vettore di un punto qualunque dello spiraloide col vettore parallelo alla tangente ad esso nel punto suddetto. Se $(\mu\ \gamma)$ e $(\mu_1\ \gamma_1)$ sono gli angoli delle coppie elementari relative a questi vettori, l'angolo della coppia che si considera sarà $(\mu - \mu_1\ ,\ \gamma - \gamma_1)$. Ma abbiamo visto per le (20) e (21) che, a parità di ρ, il modulo μ è proporzionale a γ, cosicchè questo angolo può scriversi $[\ k\rho(\gamma - \gamma_1),\ \gamma - \gamma_1\ ]$. Ora, per la nota proprietà della spirale logaritmica, la quantità $\gamma - \gamma_1$, che rappresenta l'angolo formato dalle proiezioni dei vettori della coppia, è costante, e quindi sarà costante anche l'angolo della coppia nello spazio.

Consideriamo ora il *solido* racchiuso dalla superficie dei metri e un piano qualunque condotto per l'origine. Esso segherà il solido secondo una sezione la cui area ho dimostrato essere data dalla formola

$$4\sqrt[3]{4}\,u_0\,\frac{\sqrt{1+K^2}}{K^{\frac{2}{3}}}$$

in cui K è la tangente trigonometrica dell'angolo che il piano secante fa con il piano assintotico e u_0 è il semi-periodo della funzione ellittica $p(u)$ di Weierstrass quando $g_2 = 0$ e $g_3 = 4$.

Gli infiniti piani condotti per l'origine, paragonabili ai vettori della superficie dei metri, determineranno delle aree che potranno assumersi come *unità di misura superficiali variabili* a seconda della direzione dei piani stessi, cosicchè, se è data una superficie S in un piano qualunque dello spazio, la misura o *modulo* di essa secondo la corrispondente unità superficiale sarà data dalla formola

$$mod.\ S = \frac{K^{\frac{2}{3}}}{4\sqrt[3]{4}\,u_0\sqrt{1+K^2}}\ S$$

Per una superficie qualunque nello spazio si avrà poi

$$mod.\ S = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}\,u_0}\int \frac{K^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1+K^2}}\,d\sigma$$

dove σ è funzione di K.

Diremo *solido delle unità superficiali* quello testè considerato.

Se riportiamo il valore di una unità superficiale sul vettore normale alla traccia del piano secante sul piano assintotico e contenuto nel piano secante stesso, e consideriamo contemporaneamente la lunghezza del vettore della superficie dei metri coincidente in direzione col primo, detta OP la lunghezza di questo e OQ la lunghezza dell'altro, si ha la relazione

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{\sqrt[3]{4}\,K^{\frac{1}{3}}}{8\sqrt{3}\,u_0}$$

che può servire alla costruzione di una linea delle unità superficiali derivata da quella delle unità lineari.

È notevole la formola del modulo di una superficie piana quando si introducano le proiezioni S_1 S_2 S_3 di essa sui piani dei sistemi di assi $Y_m\,Y_n\,Y_p$ e $X_m\,X_n\,X_p$. Si ha rispettivamente:

$$mod.\ S = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}\,u_0}\sqrt[3]{S_1\,(S_2^{\,2}+S_3^{\,2})} \quad mod.\ S = \frac{1}{4\sqrt[3]{3}\sqrt{2}\,u_0}\sqrt[3]{S_1^{\,3}+S_2^{\,3}+S_3^{\,3}-3S_1S_2S_3} \qquad (25)$$

Queste formole sono perfettamente analoghe a quelle che danno il modulo di un segmento nello spazio. Le proiezioni di S potrebbero chiamarsi per analogia le sue coordinate rispetto ai due sistemi di assi.

Ecco alcune altre proprietà:

Se si proietta una superficie S posta su di un piano di polo P_m sopra un altro piano di polo P_n, ambedue passanti per l'origine, eseguendo questa proiezione secondo la direzione coniugata al piano di polo P_n, si dimostra che $\frac{mod.\ S_1}{mod.\ S} = \frac{p_1}{p}$, essendo S_1 la proiezione di S e p_1 e p le distanze dei poli P_n e P_m dal piano di S.

Se si proietta una data superficie S da un punto qualunque dello spazio e si chiama h la distanza del punto di proiezione dal piano di S; H la distanza di questo piano da quello tangente alla superficie dei metri e parallelo ad esso; L la lunghezza della coniugata al piano di S condotta a questo dal punto di proiezione, il volume del solido che così si ottiene è dato da:

$$V = \frac{1}{3}\,Sh = \frac{1}{3}\,SH \cdot \frac{h}{H} = \frac{1}{3}\,SH \cdot mod.\ L$$

Calcolando SH, tenendo conto della prima delle (25), si ha infine:

$$V = \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{2}\,u_0}}{3}\,mod.\ S.\ mod.\ L. \qquad (26)$$

Cioè il volume del solido è proporzionale al modulo della base per il modulo della coniugata ad essa condotta dal punto di proiezione.

Esposte così le proprietà del modulo di un segmento e di quello di una superficie nello spazio, passiamo ora ad applicarle ai triangoli rettilinei ed ai tetraedri immersi in esso. Cominciamo dai primi.

(5) — Sia dato un triangolo qualunque. Spostiamolo parallelamente a sè stesso finchè un vertice coincida con l'origine. Sia OAN la sua posizione definitiva (fig. 3). Diciamo A_1 e N_1 i punti d'incontro dei lati OA ON con la superficie dei metri, e siano $X_1 X_2 X_3$ e $X_1' X_2' X_3'$ le loro coordinate. Conduciamo da A_1 il piano coniugato al lato ON e sia H_1 il punto d'incontro. Troviamo l'equazione di questo piano. Il piano passante per l'origine ed il cui polo è N_1 ha, come vedemmo, l'equazione $\xi_1 Z_1' + \xi_2 Z_2' + \xi_3 Z_3' = O$, cosicchè quella del piano parallelo ad esso passante per A_1 sarà $(\xi_1 - X_1) Z_1' + (\xi_2 - X_2) Z_2' + (\xi_3 - X_3) Z_3' = O$.

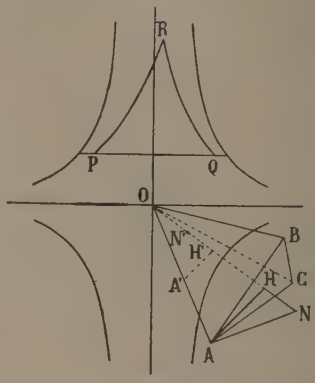


Fig. 3

L'equazione della retta ON è $\frac{\eta_1}{X_1'} = \frac{\eta_2}{X_2'} = \frac{\eta_3}{X_3'}$. Ognuno di questi rapporti è uguale al modulo ∂ del vettore del punto $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, cosicchè potremo scrivere: $\eta_1 = \partial X_1'$ $\eta_2 = \partial X_2'$ $\eta_3 = \partial X_3'$. Per il punto H_1 si verifica che $\eta_1 = \xi_1$, $\eta_2 = \xi_2$, $\eta_3 = \xi_3$ e quindi dovrà essere $(\partial X_1' - X_1) Z_1' + (\partial X_2' - X_2) Z_2' + (\partial X_3' - X_3) Z_3' = O$. Sviluppando si ottiene: $\partial (X_1' Z_1' + X_2' Z_2' + X_3' Z_3') = X_1 Z_1' + X_2 Z_2' + X_3 Z_3'$. Ma il coefficiente di ∂ è, per la (13), uguale all'unità e quindi si ha $\partial = X_1 Z_1' + X_2 Z_2' + X_3 Z_3'$. Ora, per la prima delle (23), questa quantità è uguale alla funzione V_1 della coppia OA-ON; quindi sarà

$$V_1 (OA\text{-}ON) = mod.\ OH_1 = \frac{mod.\ OH_1}{1} = \frac{mod.\ OH_1}{mod.\ OA_1}$$

È evidente che se dal punto A conduciamo la parallela AH ad $A_1 H_1$ si avrà

$$mod.\ OH = mod.\ OA . V_1 (OA - ON) \qquad (27)$$

Analogamente $mod.\ NH = mod.\ NA . V_1 (NA - NO)$

Sommando le due relazioni si ottiene:

$$mod.\ ON = mod.\ OA . V_1 (OA - ON) + mod.\ NA . V_1 (NA - NO)$$

Con lo stesso procedimento si otterranno le due altre relazioni seguenti:

$$mod.\ NA = mod.\ NO . V_1 (NO - NA) + mod.\ AO . V_1 (AO - AN)$$
$$mod.\ AO = mod.\ AN . V_1 (AN - AO) + mod.\ ON . V_1 (ON - OA)$$

Queste formole sono assai analoghe a quelle dei triangoli nel piano e permettono di risolvere i problemi relativi al calcolo degli elementi di un triangolo nello spazio.

Per le coppie formate dai lati adotteremo il criterio seguente: assumeremo come vettore primario quello la cui proiezione sul piano assintotico, vista da un punto dell'asse assintotico positivo, va a sovrapporsi alla proiezione analoga dell'altro vettore percorrendo in senso destrorso l'angolo circolare minore. Adottando per le coppie ed i lati simboli analoghi a quelli dei triangoli nel piano, si avrà ad es. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (0, \pm\pi)$. Le formole trovate sopra, indicando col segno — le coppie invertite, potranno scriversi:

$$\begin{aligned} mod.\ a &= mod.\ b.V_3\ (\alpha_3) + mod.\ c.V_2(-\alpha_2) \\ mod.\ b &= mod.\ c.V_1\ (\alpha_1) + mod.\ a.V_3(-\alpha_3) \\ mod.\ c &= mod.\ a.V_2\ (\alpha_2) + mod.\ b.V_1(-\alpha_1) \end{aligned} \tag{28}$$

avendo posto $ON = a$, $OA = b$, $AN = c$, $OA - ON = \alpha_3$, $NA - NO = -\alpha_3$, $NO - NA = \alpha_3$, $AO - AN = -\alpha_1$, $AN - AO = \alpha_1$, $ON - OA = -\alpha_3$.

Risolvendo le (28) rispetto ai moduli dei lati si avrà una relazione riguardante la proporzionalità di essi a dei composti delle funzioni V_1.

Possiamo avere un'altra formola analoga a quella dei triangoli nel piano. Infatti, proponiamoci di trovare il modulo del lato $AN = c$ in funzione dei moduli degli altri due lati. Poniamo $mod.\ a = \partial_1$, $mod.\ b = \partial_2$, $mod\ c. = \partial$ e calcoliamo ∂ servendoci della formola (17). Le coordinate di N saranno date da $\partial_1 X_1'\ \partial_1 X_2'\ \partial_1 X_3'$ e quelle di A da $\partial_2 X_1\ \partial_2 X_2\ \partial_2 X_3$. Il modulo cercato sarà espresso dalla formola seguente, ma preso nel suo valore assoluto:

$$\begin{aligned} mod^3 c = {} & (\partial_1 X_1' - \partial_2 X_1)^3 + (\partial_1 X_2' - \partial_2 X_2)^3 + (\partial_1 X_3' - \partial_2 X_3)^3 - \\ & - 3(\partial_1 X_1' - \partial_2 X_1)\ (\partial_1 X_2' - \partial_2 X_2)\ (\partial_1 X_3' - \partial_2 X_3) \end{aligned}$$

Sviluppando si ha:

$$\partial^3 = \partial_1^3 - \partial_2^3 - 3\partial_1^2\partial_2(X_1Z_1' + X_2Z_2' + X_3Z_3') + 3\partial_2^2\partial_1(X_1'Z_1 + X_2'Z_2 + X_3'Z_3)$$

cioè:

$$\partial^3 = \partial_1^3 - \partial_2^3 - 3\partial_2\partial_1^2 V_1(\alpha_3) + 3\partial_1\partial_2^2\ V_1\ (-\alpha_3) \tag{29}$$

Questa formola dà il modulo di un lato di un triangolo in funzione dei moduli degli altri due lati e delle funzioni V_1 della coppia opposta e della sua invertita. Per rammentarla basta considerare lo sviluppo della potenza cubica della differenza $\partial_1 - \partial_2$, come per quella analoga dei triangoli piani basta tener presente lo sviluppo del quadrato della differenza di due lati.

Per il calcolo della funzione V_1 possiamo seguire due vie:

1° — Adoperare la formola

$$V_1 = \frac{1}{3}\left[\pm e^{2a_0(\mu_1-\mu)} + 2e^{-a_0(\mu_1-\mu)}\cos(\gamma_1-\gamma)\right] \qquad (30)$$

2° — Riportare il calcolo a delle tabelle, come segue:

Poniamo $\mu_1 - \mu = \nu$ e $\gamma_1 - \gamma = \vartheta$. Mediante la prima delle (8) la funzione $V_1(\nu\vartheta)$ può esprimersi con la formola $V_1 = X_1'(x_2)X_1'(x_3) + X_2'(x_2)X_2'(x_3) + X_3'(x_2)X_3'(x_3)$. Ora (n. 4) si ha: $x_2 = -(\rho+\rho_0) = a_0(\nu+\nu_0)$ $x_3 = -(\rho-\rho_0) = a_0(\nu-\nu_0)$, essendo $\nu_0 = \frac{1}{a_0\sqrt{3}}\vartheta$ il modulo corrispondente allo spiraloide principale. Posto $a_0(\nu+\nu_0) = \nu'$, $a_0(\nu-\nu_0) = \nu''$, se supponiamo formate delle tabelle analoghe a quelle delle funzioni circolari, da cui risultino i valori delle funzioni elementari (9) per gli argomenti ν, potremo facilmente calcolare V_1 e, allo stesso modo, V_2 e V_3.

Questo secondo metodo ha evidentemente un carattere più teorico che pratico, considerata la difficoltà della compilazione delle tabelle anzidette.

Per il calcolo mediante la (30) è opportuno trovare il valore del modulo μ in funzione dell'angolo α che ciascun lato del triangolo fa col piano assintotico, in quanto in un rilievo topografico è questo angolo e l'angolo γ che vengono rilevati dagli strumenti. Dalla figura 2 si ha:

$$tg\alpha = \frac{Y_1}{ON} = \frac{Y_1}{\sqrt{Y_2^2+Y_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{3a_1\mu} \qquad \mu = \frac{1}{3a_0}lg(\sqrt{2}\,tg\alpha) \qquad (31)$$

Se α_1 e α_2 sono gli angoli corrispondenti al vettore primario e secondario, la formola che dà V_1 è la seguente:

$$V_1 = \frac{1}{3}\left[\pm\left(\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}\right)^{\frac{2}{3}} + 2\left(\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}\right)^{\frac{1}{3}}\cos(\gamma_1-\gamma_2)\right] \qquad (32)$$

Volendo poi risalire dal modulo di un lato alla lunghezza ordinaria basterà moltiplicare quel valore per quello dato dalla formola (11).

Una triangolazione nello spazio può essere calcolata dunque misurando una base e gli angoli α e γ analogamente alla triangolazione nel piano.

(6) — Passiamo ora all'esame dell'ente geometrico che nello spazio può contrapporsi al triangolo nel piano, vale a dire al tetraedro. Iniziamo lo studio considerando un tetraedro speciale in cui uno degli spigoli è coniugato ad una delle faccie e che chiameremo tetraedro *normale*.

Sia ad es. il tetraedro $OABC$ (fig. 3) in cui lo spigolo OA è coniugato alla faccia OBC. Conduciamo per O la coniugata alla faccia ABC e sia H il piede di essa. Esprimiamo il volume del tetraedro considerando alter-

nativamente le due coniugate OA e OH. Per la formola (26) si avrà l'uguaglianza

$$mod.\ (ABC) \cdot mod.\ OH = mod.\ (OBC) \cdot mod.\ OA$$

Prendendo in esame la coppia $OA - OH$ ed applicando la (27), l'uguaglianza precedente diviene:

$$mod.\ (OBC) = mod.\ (ABC) \cdot V_1(OA - OH)$$

dove $OA - OH$ è per definizione l'angolo del driedro formato dalle faccie OBC e ABC. Potremo chiamare *faccia cateto* la faccia OBC e *faccia ipotenusa* la faccia ABC. La funzione V_1 può paragonarsi al coseno circolare dell'angolo compreso fra il cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

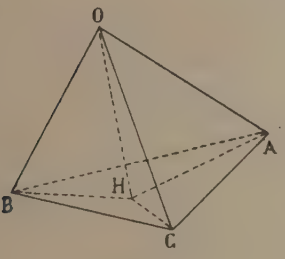


Fig. 4

Sia ora un tetraedro qualunque (fig. 4). Conduciamo dal vertice O la coniugata OH alla faccia ABC. Essa dividerà il tetraedro dato in tre tetraedri normali. Avremo allora per il già esposto:

$$\begin{aligned} mod\,(BHC) &= mod\ (OBC) \cdot V_1(BC) \\ mod\,(CHA) &= mod\ (OCA) \cdot V_1(CA) \\ mod\,(AHB) &= mod\ (OAB) \cdot V_1(AB) \end{aligned}$$

avendo indicati abbreviatamente i diedri con il loro spigolo e convenendo inoltre che i primari delle coppie relative ad essi siano quelli delle faccie concorrenti in O. Sommando si avrà:

$$mod\,(ABC) = mod\,(OBC) \cdot V_1(BC) + mod\,(OCA) \cdot V_1(CA) + mod\,(OAB) \cdot V_1(AB)$$

Con lo stesso procedimento si ottiene:

$$\begin{aligned} mod(OBC) &= mod(AOB) \cdot V_1(BO) + mod(BAC) \cdot V_1(CB) + mod(OAC) \cdot V_1(OC) \\ mod(OAB) &= mod(OAC) \cdot V_1(AO) + mod(ABC) \cdot V_1(BA) + mod(OBC) \cdot V_1(OB) \quad (33) \\ mod(OAC) &= mod(OBC) \cdot V_1(CO) + mod(OAB) \cdot V_1(OA) + mod(ABC) \cdot V_1(AC) \end{aligned}$$

Dalle (33) è possibile ricavare altre formole per la risoluzione dei tetraedri. Così potrebbe ottenersi una formola analoga alla (29) trovata per i triangoli nello spazio, esprimente il cubo del modulo della faccia (ABC) in funzione delle altre faccie e delle funzioni V_1 dei loro diedri. Nel caso di un tetraedro nel quale il triedro opposto alla faccia (ABC) sia regolare

ed abbia per asse l'asse coordinato Y_m (tetraedro che può paragonarsi al triangolo rettangolo nel piano) si ha:

$$mod\,(ABC)^2 = mod\,(OBC)^2 + mod\,(OAC)^2 + mod\,(OAB)^2 - \\ - 3\,mod\,(OBC)\,mod\,(OAC)\,mod\,(OAB)$$

CAPITOLO II.

Passiamo ora agli altri tre sistemi metrici accennati nella Premessa.

(7) — Cominceremo da quello definito dalla superficie dei metri di equazione

$$3\sqrt{3}\ Y_1\ Y_2'\ Y_3' = \pm 1 \qquad (34)$$

Questa superficie può definirsi come *il luogo dei punti per i quali il prodotto delle loro coordinate è costante.* Tale definizione richiama alla mente quella dell'iperbole nel piano.

Facendo due sezioni, una con un piano passante per gli assi X_m e Y_m e l'altra con un piano normale all'asse Y_m, si hanno le curve di equazione:

$$3\sqrt{3}\ Y_1 Y_2'^2 = \pm 1 \qquad\qquad Y_2'\ Y_3' = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}\ Y_1}$$

La prima è simile alla sezione meridiana della superficie dei metri del sistema antecedentemente trattato ed ha tutte le proprietà allora esposte; la seconda è un'iperbole equilatera completa i cui assintoti sono gli assi Y_n' e Y_p'. La superficie (34) è quindi costituita da 8 falde a sezioni orizzontali iperboliche variabili, con lo stesso asse e lo stesso piano assintotico del caso già trattato, più altri due piani assintotici che s'identificano con i piani coordinati $Y_m\,Y_n'$ e $Y_m\,Y_p'$.

Anche quì si fa luogo alla definizione di *polo*, di *direzione coniugata di un piano*, di *punti* e *vettori reciproci.*

Le funzioni $X_1\,X_2\,X_3$ sono le seconde delle (2). Anche in questo caso facendo $a_2 = 1$ e $a_3 = o$ si hanno le *funzioni elementari*

$$X_1' = \frac{1}{3}(e^x + e^{v_1 x} + e^{v_2 x}) \qquad X_2' = \frac{1}{3}(e^x + v_1 e^{v_1 x} + v_2 e^{v_2 x})$$

$$X_3' = \frac{1}{3}(e^x + v_2 e^{v_1 x} + v_1 e^{v_2 x}) \qquad (35)$$

con le quali possiamo esprimere le $X_1\,X_2\,X_3$ mediante le formole (8).

Ponendo $\frac{a_2+a_3}{2} = -P$ $\frac{a_2-a_3}{2}\sqrt{3} = Q$ $\frac{P}{Q} = \rho$ $Qx = \gamma$, essendo γ un angolo iperbolico, le $X_1\,X_2\,X_3$ divengono (essendo α_o $arTgh\,\frac{1}{\sqrt{3}}$ e

ponendo il doppio segno avanti al primo termine in parentesi per tener conto della falda rispetto al piano assintotico)

$$X_1 = \frac{1}{3}(\pm e^{-2\rho r} + 2e^{\rho r}\ Cosh\gamma) \qquad X_2 = \frac{1}{3}\left[\pm e^{-2\rho r} - 2e^{\rho r}\ Senh(\alpha_0 - \gamma)\right]$$

$$X_3 = \frac{1}{3}\left[\pm e^{-2\rho r} - 2e^{\rho r}\ Senh\,(\alpha_0 + \gamma)\right]$$

Le $Y_1\ Y_2\ Y_3$ e le $Y_1\ Y_2'\ Y_3'$ divengono:

$$Y_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\ e^{-2\rho r} \qquad Y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\ e^{\rho r}\ Cosh\gamma \qquad Y_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\ e^{\rho r}\ Senh\gamma \quad (36)$$

$$Y_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\ e^{-2\rho r} \qquad Y_2' = \sqrt{\frac{1}{3}}\ e^{(\rho+1)\gamma} \qquad Y_3' = \sqrt{\frac{1}{3}}\ e^{(\rho-1)\gamma} \quad (37)$$

Fissato il valore di ρ, al variare di γ il punto $Y_1\ Y_2\ Y_3$ percorre una curva gobba sulla superficie dei metri che diremo, ma solo per analogia di generazione con lo spiraloide del precedente sistema metrico, *spiraloide iperbolico*. Dalle espressioni di Y_2 e Y_3 si ricava: $\sqrt{Y_2^2 - Y_3^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ e^{\rho r}$. Ma dal mio Trattato citato nella Premessa risulta che il primo membro è il modulo iperbolico θ del vettore del punto $Y_2\ Y_3$ sul piano assintotico cosicchè

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}\ e^{\rho r} \qquad (38)$$

è l'equazione della proiezione dello spiraloide su detto piano.

Apro qui una breve parentesi. Seguendo i fondamenti di una geometria a metri variabili esposti nella seconda Parte dello stesso Trattato, mostrai in una mia Memoria [1]) tre sistemi metrici nel piano basati sulle seguenti curve dei metri: il cerchio di raggio *uno*, l'iperbole equilatera di semidiametro reale uguale ad *uno* e, infine, la coppia di rette parallele ad un asse passante per l'origine a distanza *uno* da questo. Questi sistemi furono da me chiamati rispettivamente *circolare* (geometria ordinaria) *iperbolico* e *retto*. Abbiamo avuto occasione d'incontrare (n. 3) la curva di equazione polare $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\ e^{\rho r}$ (spirale logaritmica) appartenente al sistema circolare e quella testè considerata di equazione $\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}\ e^{\rho r}$, la quale equazione è dello stesso tipo della precedente, ma va interpretata nel

[1]) « *Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo* ». Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Vol. II, Serie 3ª, N. 7.

sistema metrico retto. Orbene, è risultato da miei studi inediti che tutte e tre le curve hanno comuni delle proprietà, ciascuna interpretata nel proprio sistema metrico. Così la proprietà della spirale logaritmica riguardante la costanza dell'angolo formato da un suo vettore con la tangente nel suo estremo; l'espressione della lunghezza dell'arco computato dall'origine fino ad un punto qualsiasi, e quella dell'area compresa fra un vettore fisso, un vettore qualunque e la curva, si riscontrano per l'altre due curve quando alla lunghezza ordinaria si sostituisca il modulo iperbolico o retto ed all'angolo circolare si sostituisca quello iperbolico o quello rettilineo.

Il modulo di un segmento nel sistema metrico che stiamo trattando, se $a_1\ a_2\ a_3$ sono le coordinate dell'estremo del vettore condotto parallelamente al segmento dato e della sua stessa lunghezza, si esprime con $\delta = \sqrt{3}\ \sqrt[3]{a_1\ a_2\ a_3}$.

Procedendo come nel precedente sistema metrico, si otterranno le seguenti formole per il modulo d'arco di spiraloide e per quello d'arco di meridiano

$$mod.\ s = \sqrt[3]{2\rho(\rho^3-1)}\,\gamma \qquad mod.\ s = \sqrt[3]{2}\,\rho\gamma \tag{39}$$

nella prima contando gli archi a partire dal punto d'incontro dei piani coordinati del sistema d'assi $Y_1\ Y_2\ Y_3$ con le sezioni delle falde della superficie dei metri fatte con un piano parallelo a quello assintotico posto a distanza $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ da questo; nella seconda contando gli archi a partire dal punto d'incontro del meridiano considerato con la sezione anzidetta che chiameremo *sezione fissa*.

Servendoci della seconda delle (39) potremo introdurre nelle formole (35) (36) (37) il modulo μ d'arco di meridiano, cosicchè ad es. le (37), ponendo $\sqrt[3]{2} = \mp\frac{1}{a_0}$ diventano:

$$Y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}e^{2a_0\mu} \qquad Y_2' = -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-a_0\mu+\gamma} \qquad Y_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-a_0\mu-\gamma} \tag{40}$$

Chiameremo *spiraloide principale* quello che corrisponde a $\rho = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e che si ottiene per $a_2 = 1$ e $a_3 = o$. Le sue coordinate sono:

$$Y_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\,e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\gamma} \qquad Y_2' = \sqrt{\frac{1}{3}}\,e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\gamma_1\gamma} \qquad Y_3' = \sqrt{\frac{1}{3}}\,e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\gamma_2\gamma}$$

ovvero, esprimendo γ in funzione del modulo del suo arco mediante la prima delle (39):

$$Y_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{\sqrt[3]{2}\,\nu} \qquad Y_2' = \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{\sqrt[3]{2}\,v_1\nu} \qquad Y_3' = \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{\sqrt[3]{2}\,v_2\nu} \tag{41}$$

essendo ν il modulo anzidetto.

Anche per gli spiraloidi iperbolici sussiste la proprietà della curva (38) riguardante la costanza dell'angolo formato da un suo vettore con la tangente nel suo estremo. Per veder ciò basta seguire lo stesso procedimento adoperato per lo spiraloide del sistema metrico precedente.

Il modulo di una superficie piana qualunque è dato dalla formola:

$$mod.\ S = \frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}} S}{\sqrt[3]{4}\, v_0 \sqrt{1+K^2}}$$

dove K è la tangente circolare dell'angolo che il piano S forma col piano assintotico; ε è una quantità che dipende dai coefficienti dell'equazione del piano secante e v_0 è una costante.

Se $S_1\, S_2'\, S_3'$ sono le proiezioni di S sui piani coordinati del sistema di assi $Y_1\, Y_2'\, Y_3'$, si ha anche:

$$mod.\ S = \frac{1}{2v_0} \sqrt[3]{S_1\, S_2'\, S_3'}$$

L'orientamento di un segmento nello spazio sarà, come nel sistema precedente, determinato dalle seguenti *misure* relative al vettore condotto parallelamente e nel senso di quello dato.

1° — Angolo iperbolico γ formato dal piano meridiano passante per l'asse X_m con quello passante per l'estremo del vettore anzidetto.

2° — Modulo μ dell'arco di meridiano passante per detto estremo, contato a partire dal punto d'incontro del meridiano con la sezione fissa.

Fissati così i principi di questo sistema metrico, rimandiamo per il suo ulteriore sviluppo ai procedimenti seguìti per il sistema metrico precedente.

(8) — Passiamo all'esame del sistema metrico definito dalla superficie dei metri di equazione

$$3\sqrt{3}\, Y_1 Y_3'^{\,2} = \pm 1 \tag{44}$$

Secandola con un piano parallelo al piano coordinato $Y_m\, Y_p'$ e con un altro parallelo al piano coordinato $Y_n'\, Y_p'$, si hanno rispettivamente le curve:

$$Y_1\, Y_3'^2 = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad Y_3'^2 = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}\, Y_1}$$

cioè una curva dello stesso tipo di quelle trovate nei due sistemi metrici precedenti e due coppie di rette parallele al piano assintotico e da questo equidistanti e simmetriche rispetto al piano $Y_m\, Y_n'$. La superficie dei metri è dunque costituita da quattro falde rigate a generatrici parallele al piano assintotico e al piano coordinato $Y_m\, Y_n'$ le cui sezioni con piani paralleli al piano coordinato $Y_m\, Y_p'$ sono, come abbiamo visto sopra, dello stesso tipo di quelle dei sistemi metrici precedenti.

Anche per questa superficie dei metri sono da considerare i *poli* dei piani passanti per l'origine, le loro *direzioni coniugate*, i *punti ed i vettori reciproci*.

Le funzioni $X_1'\, X_2\, X_3$ sono le terze delle (2). Come per i due sistemi precedenti abbiamo introdotto nelle loro espressioni le funzioni circolari ed iperboliche, così in queste possiamo introdurre le *funzioni rette*. Infatti, se diamo a x, 1, $\frac{v_1}{v_2}$, $\frac{v_2}{v_1}$ il significato di angoli *rettilinei* presi tutti nella stessa zona 1 o 2, scrivendo opportunamente i coefficienti di e^{-ax}, si ottiene:

$$X_1 = \frac{1}{3}\left[\pm e^{2ax} + e^{-ax}\ senr\,(x+1)\right] \qquad X_2 = \left[\pm e^{2ax} + v_1 e^{-ax}\ senr\,(x+\frac{v_2}{v_1})\right]$$

$$X_3 = \frac{1}{3}\left[\pm e^{2ax} + v_2 e^{-ax}\ senr\,(1+\frac{v_1}{v_2})\right] \qquad (45)$$

Le funzioni $Y_1\, Y_2'\, Y_3'$ date dalle formole di trasformazione (5) della Premessa sono:

$$Y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{2ax} \qquad Y_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}\, xe^{-ax} \qquad Y_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-ax} \qquad (46)$$

Moltiplicando fra loro queste espressioni si ha $Y_1\, Y_2'\, Y_3' = \frac{x}{3\sqrt{3}}$, da cui può ricavarsi un significato geometrico di x. Esse possono anche scriversi:

$$Y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{2ax} \qquad Y_2' = \frac{(-1)^s}{\sqrt{3}}\, e^{-ax}\ senr\,(x_s) \qquad Y_3' = \frac{(-1)^s}{\sqrt{3}}\, e^{-ax}\ cosr\,(x_s) \qquad (47)$$

Fissato a, al variare dell'angolo rettilineo x, il punto $Y_1\, Y_2'\, Y_3'$ percorre una curva gobba che possiamo, sempre per analogia con le prece-

denti, chiamare *spiraloide retto*. Un punto della sua proiezione sul piano assintotico ha le coordinate Y_2' e Y_3'. Il modulo retto ν del suo vettore è dato (vedi Memoria citata) dalla proiezione di questo sull'asse Y_p', cioè da Y_3'. Dall'ultima delle (46) si ha perciò:.

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ax} \qquad (48)$$

Questa è l'equazione della proiezione dello spiraloide nel sistema metrico retto. Come già dicemmo, essa è dello stesso tipo di quelle della spirale logaritmica e della proiezione dello spiraloide iperbolico, e uguali sono le espressioni delle proprietà delle tre curve quando siano interpretate ciascuna nel proprio sistema metrico.

Il modulo di un segmento nello spazio, se $a_1\, a_2\, a_3$ sono le coordinate dell'estremo del vettore condotto parallelamente al segmento dato e della stessa sua lunghezza, è dato da $\delta = \sqrt{3}\ \sqrt[3]{a_1\, a_2\, a_3}$.

Mediante il solito procedimento si otterranno le seguenti formole per il modulo d'arco di spiraloide retto e per quello d'arco di meridiano:

$$mod.\ s_1 = \sqrt[3]{2}\ ax \qquad\qquad mod.\ s_2 = \sqrt[3]{2}\ xa$$

nella prima formola contando gli archi dal punto di coordinate $Y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $Y_2' = O \quad Y_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e nella seconda partendo dal punto $Y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $Y_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} x \quad Y_3' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Si dirà anche qui *sezione fissa* quella fatta col piano $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ o col piano $Y_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Da queste formole si deduce che il modulo dell'arco di spiraloide compreso fra il punto di origine ed un punto qualsiasi della superficie dei metri è uguale al modulo dell'arco di curva meridiana compreso fra la sezione fissa e il punto stesso.

Per stabilire l'orientamento di un segmento qualunque nello spazio nel sistema metrico che stiamo trattando si adotteranno le seguenti *misure* relative al vettore condotto dall'origine parallelamente e nel senso del segmento dato:

1° — L'angolo rettilineo x formato dal piano $Y_m\, Y_p'$ con quello passante per il punto d'incontro di detto vettore con la superficie dei metri.

2° — Modulo μ dell'arco di meridiano passante per detto estremo, contato a partire dal punto d'incontro del meridiano stesso con la sezione fissa.

Abbiamo così stabiliti i principi base per l'ulteriore sviluppo di questo sistema metrico.

(9) – Consideriamo infine il sistema metrico definito dall'equazione $Y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ cioè dalla coppia di piani paralleli al piano $Y_n' Y_p'$ e distanti $\frac{1}{\sqrt{3}}$ da questo.

Questo sistema rappresenta nello spazio quello che nel piano abbiamo chiamato sistema retto.

Le funzioni $X_1 X_2 X_3$ sono le quarte delle (2) della Premessa. Mediante le formole di trasformazione (5) si hanno le seguenti funzioni Y:

$$Y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad Y_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} x \qquad Y_3' = \frac{1}{\sqrt{3}} x^2 \qquad (50)$$

Dalle due ultime si ha $Y_2'^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_3'$. Se diamo ad x il significato di angolo rettilineo nel sistema retto definito da due rette contenute nel piano $Y_n' Y_p'$, parallele all'asse Y_p' e a distanza *uno* da questo, al variare di x il punto definito dalle (50) descrive delle parabole contenute nei piani $Y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ e toccantisi nel vertice. Esse corrispondono agli spiraloidi dei sistemi metrici precedenti. Nella figura abbiamo tracciata la proiezione di queste parabole sul piano assintotico. Detto μ il modulo rettilineo del vettore generico OP, si ha: $\mu = \frac{OP}{OM} = \frac{Y_3'}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} x$. L'equazione della parabola nel sistema retto sarà data da $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} x$. Essa può definirsi come il luogo dei punti tali che il modulo retto dei loro vettori è proporzionale all'angolo rettilineo da essi formato con l'asse OY_n'.

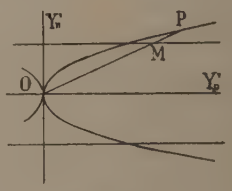


Fig. 5

Sostituendo ad x il valore in funzione di μ le (50) divengono:

$$Y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad Y_2' = \mu \qquad Y_3' = \sqrt{3}\,\mu^2 \qquad (51)$$

Il modulo di un segmento nello spazio, se $a_1 a_2 a_3$ sono le coordinate dell'estremo del vettore della superficie dei metri (coppia di piani) condotto parallelamente al dato e della sua stessa lunghezza, è dato da $a_1\sqrt{3}$. Per stabilirne l'orientamento è facile vedere che bastano le seguenti *misure*:

1° — Angolo rettilineo x formato dal piano coordinato $Y_m Y_n'$ col piano contenente l'asse Y_m e il vettore anzidetto.

2° — Modulo retto μ della proiezione del vettore stesso sul piano assintotico.

Infatti se OP è tale proiezione, il punto P risulta determinato dal valore di μ. Conducendo da P la normale fino ad incontrare la superficie dei metri (uno dei piani), la congiungente l'origine con il punto d'incontro con essa darà la direzione del segmento considerato.

Nota. Nella Memoria citata a pie' pagina alla fine della Premessa trattai della rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo in relazione ai tre sistemi metrici in essa introdotti, e precisamente di quella delle algebre dei *numeri complessi*, *bireali* e *duali* in relazione ai sistemi metrici *circolare*, *iperbolico* e *retto*. In una Nota in corso di stampa ho applicato i sistemi metrici qui studiati alla rappresentazione geometrica di alcune algebre reali dotate di modulo e commutative del 3° ordine.

ALFREDO LACROIX

Commemorazione letta dal socio corrispondente **Antonio Scherillo**

(Adunanza del dì 8 maggio 1948)

Il 16 marzo di quest'anno moriva a Parigi il nostro socio corrispondente straniero Alfredo Lacroix. La scomparsa di Alfredo Lacroix è una gravissima perdita per i mineralogisti di ogni nazione, non solo perchè la scienza è, per sua natura, internazionale, ma anche perchè il Lacroix si era occupato dello studio dei minerali e delle rocce, non unicamente della Francia, ma di tutto il mondo. Ricordo in particolare che il Lacroix deve essere annoverato tra i più benemeriti studiosi dei nostri vulcani, ed è appunto in riconoscimento di questi suoi meriti che nel 1931 era stato nominato socio corrispondente straniero della nostra Accademia, come nel 1908 era stato del pari nominato socio straniero dell'Accademia dei Lincei.

Nato nel 1863 a Macon studiò prima farmacia, per poi orientarsi verso le scienze mineralogiche. Intorno alla fine del secolo scorso, la Francia vantava grandi nomi nel campo delle discipline geomineralogiche; era quello il periodo in cui nasceva la scienza petrografica e la Francia contendeva in questo campo il primato alla Germania. Maestri di A. Lacroix possono

esser considerati Augusto Michel Lévy e Ferdinando Fouqué: dal primo il Nostro potè apprendere la tecnica dello studio delle rocce, il secondo lo indirizzò allo studio della petrografia applicata alla vulcanologia, in cui il Lacroix doveva tanto distinguersi. Dopo esser stato preparatore al Collegio di Francia, incaricato di conferenze di petrografia presso la Scuola di Alti Studi, e la Facoltà di Scienze, collaboratore al servizio della Carta di Francia, fu nominato nel 1893 professore di mineralogia al Museo di Storia Naturale di Parigi, dove rimase fino al termine della sua carriera. Socio dell'Accademia delle Scienze dal 1904, fu nominato, nel 1914, segretario perpetuo dell'Accademia stessa.

Di Alfredo Lacroix si può ben dire che ha speso la sua lunga vita al servizio della scienza. Lavoratore instancabile ed entusiasta, lascia un numero grandissimo di lavori, di diversa mole e importanza, ma complessivamente molto notevoli, su argomenti di mineralogia, petrografia, vulcanologia, geologia, storia della scienza. Il Lacroix ebbe la fortuna di poter viaggiare molto, in un gran numero di paesi, e il merito di sapere osservare acutamente, di descrivere bene ciò che osservava, e di trarre dalle sue osservazioni importanti conclusioni. Da questo punto di vista si ricollega ai grandi naturalisti del passato, ma, contemporaneamente, fu un maestro dell'indagine in laboratorio, cosicchè il Lacroix fu un mineralogista petrografo veramente completo.

Io non posso, naturalmente, passare in rivista tutta la sua vasta produzione scientifica: mi limiterò a ricordarne le opere più importanti, soffermandomi specialmente sui lavori che riguardano l'Italia.

Note a tutti i cultori della mineralogia sono le sue classiche opere: *Mineralogia della Francia e Colonie* e *Mineralogia del Madagascar*, isola che è del più alto interesse per le sue pegmatiti ricche di minerali rari.

Un'opera fondamentale per la scienza vulcanologica è *La montagna Pelée e le sue eruzioni*, dove viene descritto per la prima volta il fenomeno delle « nubi ardenti » e la formazione di una guglia lavica.

Ma, secondo me, il lavoro più originale e importante del Lacroix è quello sugli *Inclusi delle rocce vulcaniche* in cui si affronta, con una visione di insieme, il problema di questi interessantissimi prodotti. Tali inclusi erano già stati frammentariamente e parzialmente studiati da vari scienziati, i quali, però, avevano piuttosto rivolto la loro attenzione ai minerali ben cristallizzati che spesso vi si rinvengono. Il Lacroix invece, servendosi di un materiale abbondantissimo, proveniente dalle più svariate regioni vulcaniche, ne ha compiuto lo studio coi metodi petrografici, ciò che gli ha permesso di condurre l'indagine assai più a fondo, di darne una prima classificazione, e di spiegarne il significato e la varia genesi. Naturalmente, i proietti dei nostri vulcani, sia attivi che estinti, hanno gran parte in questo lavoro e bisogna riconoscere che sull'argomento l'opera del Lacroix costituisce ancora l'unico lavoro d'insieme.

La grande eruzione vesuviana del 1906 è stata oggetto di numerosi lavori del Lacroix, che ne ha studiato e descritto le lave e i prodotti piroclastici, nonchè i minerali delle fumarole. Dal punto di vista petrografico è lo studio fondamentale su questa eruzione, per quanto non siano da dimenticare le ricerche del nostro Casoria sull'argomento. Pure molto importante è l'altro lavoro sui proietti vesuviani che rappresentano i prodotti della cristallizzazione del magma in profondità. A questo lavoro ne ha fatto seguito un altro sui consimili proietti del Vulcano Laziale.

Non va taciuto che da più parti è stato mosso al Lacroix l'appunto di avere, specie in alcuni lavori, complicata inutilmente, coll'introduzione di un gran numero di nomi superflui, la nomenclatura petrografica, e l'appunto è giustificato, ma non diminuisce certo i grandissimi e reali meriti scientifici dell'autore de *La montagna Pelée e le sue eruzioni* e de *Gli inclusi delle rocce vulcaniche.*

Per quanto riguarda le ricerche del Lacroix su argomenti che interessano la mineralogia e geologia d'Italia, noi italiani riconosciamo volentieri il grandissimo contributo portato specialmente allo studio dei nostri vulcani. Certo il nostro amor proprio avrebbe preferito che almeno lo studio petrografico dei prodotti dell'eruzione vesuviana del 1906, fosse stato compiuto interamente da scienziati italiani, ma nella trattazione degli argomenti scientifici non si possono porre barriere tra nazione e nazione ed è colpa nostra se non abbiamo noi compiuto questo studio. Ci conforta tuttavia il pensiero che, almeno per quanto riguarda i minerali vesuviani, il primato scientifico sia stato conservato all'Italia da un nostro grande scienziato contemporaneo del Lacroix: Ferruccio Zambonini. Se la scienza è internazionale, gli scienziati hanno però una patria, e, mentre onoriamo la memoria di Alfredo Lacroix, esprimiamo l'augurio di scienziati italiani, che il primato dello studio dei nostri vulcani resti conservato all'Italia.

Nozioni intoduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche d'indice n dell'S_r proiettivo complesso

Nota IV del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 8 maggio 1948)

Sunto. — Si completano le nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di S_r di indice n, generalizzando la funzione $N(X)$ nella funzione $N(X, \rho)$ essendo ρ un ramo semplice o multiplo o generale di S_r.

29. *Rette tangenti ad una* W_{r-1}. *Le funzioni* $N(X, a)$ *di una* W_{r-1}.

Nel n° 4 abbiamo definito l'ipersuperficie algebrica, d'indice di algebricità n, $W_{r-1} = [I_{r-1}, N(X)]$, di *sostegno* I_{r-1} e con la funzione numerica $N(X)$. Gli n razionali relativi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valori della $N(X)$ in un punto X' di S_r si determinano a partire dalla sostituzione (4) (che rappresentano una retta a di S_r uscente da X').

$$x_s = x'_s + a_s z \qquad (4)$$

(z parametro complesso)

e quindi dipendono dalla retta a, oltre che dal punto X'. Per definire la $N(X)$ si suppone, se $r > 1$, la retta a generica per X'. Se è $r > 1$, si può considerare anche definita una funzione ad n valori $N(X, a)$ della coppia *punto-retta* (X, a) e si ha $N(X', a) = N(X')$ se è a una retta *generica* per X'. Come gli n valori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di $N(X)$ in X' si dicono le *sottomultiplicità* e la loro media aritmetica si dice la *multiplicità* di W_{r-1} in X', così gli n valori di $N(X, a)$ in (X', a') e la loro media aritmetica si diranno le *sotto-multiplicità* e la *multiplicità d'intersezione* di W_{r-1} con la retta a' nel punto X'.

Nel n° 18 *a)* abbiamo osservato che si ha:

$$N(X) = \Phi [N_0(X) \ldots\ldots N_n(X)]$$

essendo $N_0(X) \ldots\ldots N_n(X)$ certe $n+1$ funzioni ad un sol valore e Φ una ben determinata legge *indipendente dall'ipersuperficie che si considera.* Anche in corrispondenza alle funzioni ad un sol valore $N_0(X) \ldots\ldots N_n(X)$ si hanno le funzioni ad un sol valore $N_0(X, a) \ldots N_n(X, a)$ e si ha:

$$N(X, a) = \Phi [N_0(X, a) \ldots\ldots N_n(X, a)].$$

Le rette a che si dicono tangenti a W_{r-1} in X' sono quelle per le quali avviene che uno almeno degli n valori $N_i(X', a)$ sia diverso da $N_i(X')$ e si ha in generale $N(X', a) \equiv N(X')$.

30. *Rami semplici, multipli e generali di* S_r.

Consideriamo la sostituzione che generalizza la (4)

$$(*) \qquad x_s = x'_s + a_{s1} z + a_{s2} z^2 + \ldots + a_{sm} z^m + \ldots$$

con la condizione che le $r+1$ serie $x'_s + \Sigma a_{ss} z^s$ siano convergenti in $r+1$ cerchi γ_s di centro $z = 0$ con raggio > 0.

Sia γ un cerchio di raggi > 0, di centro $z = 0$, interno agli $r+1$ cerchi γ_s. Mentre z varia su γ, il punto $X(x_s)$ dato dalle (*) descriverà un insieme ρ_0 di punti di S_r. Un punto X di ρ può provenire da un solo valore z, o da più valori z di γ. Nel primo caso l'insieme ρ_0 si dirà *un ramo semplice di* S_r, nel secondo caso si dirà che ρ_0 è il sostegno di ramo ρ di S_r *non semplice o multiplo.*

Se i punti di ρ_1 appartengono ad una curva algebrica, ed è un ramo semplice, tale insieme ρ_1, è un ordinario ramo di tale curva. In ogni caso il punto $X'(x'_0 \ldots x_r)$ si dirà *origine del ramo* ρ semplice o multiplo di sostegno ρ_1 di equazioni parametriche (*).

Posto

$$M_0 = \begin{Vmatrix} x'_0 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ x'_r \end{Vmatrix} \qquad M_1 = \begin{Vmatrix} x'_0 & a_{01} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ x'_r & a_{0r} \end{Vmatrix} \qquad M_2 = \begin{Vmatrix} x'_0 & a_{01} & a_{02} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ x'_r & a_{r1} & a_{r2} \end{Vmatrix} \quad \ldots\ldots$$

indichiamo con c_s la caratteristica della matrice M_s.

Sia M_s la prima matrice nella successione $M_0, M_1 \ldots\ldots$ che ha caratteristica 2. Sicchè sarà

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{s'-1} = 1; \qquad c_{s'} = 2; \qquad 2 \leq c_{s'+1} \leq c_{s'+2} \leq \ldots \qquad (**)$$

L'intero s' si dirà il *primo fattore di multiplicità del ramo* ρ di S_r di equazioni parametriche (*). Indicando con $A^{(1)}$ il punto di S_r di coordinate $(a_{s'0}, a_{s'1} \ldots a_{s'r})$ [ultima colonna della matrice M'_s] la retta $X' A^{(1)}$ si dirà *tangente al ramo* ρ, se questo non appartiene a detta retta (ciò che avviene se nelle relazioni su scritte), dopo il 2 vale sempre il segno $=$. *Quando* ρ *è un ordinario ramo di una curva algebrica il primo fattore di multiplicità* s' *non è altro che l'ordine di* ρ *cioè la multiplicità di intersezione del ramo* ρ *nel suo punto origine* X' *con un iperpiano generico passante per* X'.

Il concetto di ramo semplice o multiplo di S_r di equazioni (*) si generalizza nel concetto di *ramo generale* di S_r di origine $X'(x'j)$ di equazioni:

$$[*] \qquad x_j = x'_j t^{s_0} + a_{j_1} t^{s_0+1} + a_{j_2} t^{s_0+2} + \dots$$

sempre con la condizione che le $r+1$ serie a secondo membro siano convergenti in un cerchio γ di centro $t=0$ e raggio >0 e abbastanza piccolo in modo che una almeno delle $r+1$ serie non abbia in γ alcuno zero oltre quello nel punto $t=0$ sicchè per ogni punto di γ diverso da $t=0$ le [*] forniscono i numeri $[x_0, x_1 \dots x_{r+1}]$ non tutti nulli e quindi determinano un punto $X(x_1 \dots x_{r+1})$ di S_r. Facendo tendere t a zero X tende al punto $X'(x'j)$ *Come insieme di punti le* [*] *definiscono lo stesso insieme di punti delle* (*)

Diremo che i rami, poichè (*) e [*] hanno lo stesso *sostegno* costituito da tale insieme di punti.

Scriviamo le (*) nella forma più generale

$$\{*\} \qquad x_j = b_{j_0} + b_{j_1} t + b_{j_2} t^2 + b_{j_3} t^3 + \dots$$

Posto

$$M_a = \begin{Vmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \dots b_{0r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{r0} & b_{r1} & b_{r2} \dots b_{rr} \end{Vmatrix}$$

e indicata con c_a la caratteristica di M_a sarà:

$$c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq r+1.$$

Nella successione $c_0, c_1, c_2 \dots$ sia c_{s_0} la prima caratteristica uguale ad 1 Sia c_{s_1} la prima ugnale a 2, c_{s_2} la prima uguale a 3 ecc. Sicchè saranno $(b_{0s_0} \dots b_{rs_0})$ gli elementi *della prima colonna ad elementi* non tutti nulli. (Nel caso delle (*) è $s_0 = 1$). Il punto

$$A^0 (b_{0s_0} \dots b_{rs_0}) \text{ è l'origine del ramo } \rho.$$

Inoltre $(b_{0s_1} \dots b_{rs_1})$ non sono tutti nulli e sono gli elementi della prima colonna dopo quella s-ma, che ha gli elementi non proporzionali alle coordinate di $A^{(0)}$. Posto $A^{(1)}$ $(b_{0s_1}, \dots, b_{rs_1})$ la retta $A^{(0)}\, A^{(1)}$ si dirà la *retta tangente al ramo* ρ *in* $A^{(0)}$. Se il ramo non è rettilineo vi sarà una c uguale a 3, la c_{s_2}. I numeri $(b_{0s_2} \dots b_{rs_2})$ non sono tutti nulli e posto $A^{(3)}$ $(b_{0s_2} \dots b_{rs_2})$ i tre punti $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ risultano indipendenti. Il piano che li congiunge si dirà *piano osculatore al ramo nell' origine* $A^{(0)}$. Se il ramo non è piano, cioè non appartiene ad $A^{(0)}\, A^{(1)}\, A^{(2)}$ vi sarà una c col valore 4, la c_{s_3}. Posto

$A^{s)}$ $(b_{0s3} \dots b_{rs3})$ i punti $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ risultano indipendenti e l'S_3 che li congiunge si dirà *l'* S_3 *osculatore al ramo nell'origine* $A^{(0)}$. E così via di seguito si estendono le definizioni, già valide per i rami ordinari (semplici) nella geometria algebrica, al ramo generale delle equazioni $\{*\}$. Gl'interi $s_0, s_1, s_2 \dots$ si chiameranno primo, secondo, terzo ecc. *fattore di multiplicità* del ramo ρ. L'intero s_0 si dirà, anche, *esponente all'origine. I fattori di molteplicità sono invarianti proiettivi del ramo generale.* Posto

$$\alpha = s_1 - s_0 \qquad \alpha_1 = s_2 - s_1 \qquad \alpha_2 = s_3 - s_2$$

gl'interi $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \dots$ si diranno rispettivamente *l'ordine, il primo rango, il secondo rango* ecc. del ramo e sono pure degl'invarianti proiettivi di ρ.

Quando ρ è un ordinario ramo, *considerato semplicemente come insieme di punti*, gl'interi $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \dots$ sono gli ordinari ordine, primo rango, secondo rango ecc. di tale ramo.

31. *La funzione* $N(X, \rho)$ *generale determinata da una funzione semiomogenea.*

Quanto si è detto nel n° 29 relativamente alla funzione numerica $N(X, a)$ della coppia punto, retta si può ripetere sostituendo alla retta a uscente da X il ramo generale ρ di origine $X \equiv A^{(0)}$ di equazione $\{*\}$. Avremo di conseguenza una funzione numerica $N(X, \rho)$ generale ad n valori $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, che si dicono assunti da N nel punto $X \equiv A^{(0)}$ *come origine del ramo* ρ di equazione $\{*\}$. La funzione $N(X, \rho)$ così ottenuta si dirà la funzione numerica generale della W_{r-1} $[I_{r-1}, N(X)]$ definita nel numero 4 e si porrà anche

$$W_{r-1} = [I_{r-1}, N(X, \rho)].$$

Il sistema ∞^6 di V_3^3 di S_5 rappresentante le catene unidimensionali dell'S_4 di 1ª specie di Study

Nota di **Maria Teresa Riccio**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 8 maggio 1948)

Sunto. — Si caratterizza il sistema ∞^6 di V_3^3 di S_5 rappresentante le catene unidimensionali dell'S_4 di 1ª specie di Study come insieme delle varietà trasformate di una V^3_3 di Segre mediante il gruppo equivalente di proiettività determinato in S_5 dall'algebra di Study.

1. Costruzione e ordine della V_3.

Il 3 complesso di piani γ, di S_5 di ordine 1 che ci dà la prima rappresentazione dell'S_4 di prima specie di Study si costruisce nel seguente modo [1]: In un S_5 proiettivo complesso consideriamo i tre punti $P_1\ P_2\ P_3$ aventi per coordinate le tre righe della prima matrice sinistra:

$$O'_x \left\| \begin{matrix} Z_3 & O & O & Z_6 & O & O \\ Z_1 & Z_2 & O & Z_4 & Z_5 & O \\ O & O & Z_3 & O & O & Z_6 \end{matrix} \right\|$$

supposta di caratteristica massima cioè supposto $X(x_1\ x_2)$ appartenente a S'_4 e diciamo π il piano congiungente $P_1\ P_2\ P_3$. Al variare di X in S'_4, π descrive il tre complesso γ di piani di S_5 che si ottengono proiettando da ciascun punto P_3 dell'S_4 di equazioni:

$$(r)\quad z_1 = z_2 = z_4 = z_5 = 0$$

le ∞^2 rette $P_1\ P_2$ della stella di centro P_1 appartenente all'S_3^* di equazioni:

$$(S_3^*)\quad z_3 = z_6 = 0$$

I punti $P_1\ P_3$ si corrispondono in una proiettività che diciamo ω esistente fra l'S_4 di equazioni (r) e l'S_4 di equazioni:

$$(m)\quad z_2 = z_3 = z_5 = z_6 = 0$$

appartenente ad (S_3^*).

Consideriamo una retta generica s dell'S_5 ambiente della congruenza γ.

---

[1]) v. N. Spampinato, « *Teorie delle caratteristiche in un'algebra datata di modulo ed* S_r *ipercomplesso* ». Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei 1936, vol. IV, fasc. IV.

Per un punto $P\ (z_1 \ldots z_6)$ di tale retta passa un solo piano di γ, infatti l'S_4 congiungente l'S_3^* con il punto P, seca (r) in un punto X_1 il cui omologo in (m) è X'_1. Il piano $P\ X_1\ X'_1$ seca S_3^* in una retta passante per X'_1 e quindi è un piano di γ. Osserviamo che le rette (r) e s si corrispondono in una proiettività che diciamo φ. Al variare del punto P in s il piano di γ descriverà un sistema ∞^1 che riempie una V_3 dell'S_5 ambiente. Gli ∞^2 punti dell'S_1' di Study che corrispondono a questi piani di γ costituiscono un insieme che si dice *catena* dell'S'_1.

La V_3 è di ordine 3. Infatti secando la V_3 con un piano α generico si hanno tre fasci diretti proiettivi (derivanti dalle proiettività esistenti fra le rette (m) e (r), (s) e (r) e quindi fra (m) e (s) i cui centri indichiamo con C_1 C_2 e C_3. Il luogo dei punti comuni alle rette dei fasci di centri C_1 e C_2 è una conica passante per i centri dei due fasci, analogamente il luogo dei punti comuni alle rette dei fasci di centri C_2 e C_3, Si ha quindi che le due coniche hanno in comune 4 punti fra cui il punto C_2, quindi restano tre punti che sono comuni ad α e V_3.

La V_3^3 è costituita da ∞^1 piani generatori e da ∞^2 rette direttrici (che si appoggiano ai piani generatori). Al variare della retta s in S_5, la V_3^3 descrive un sistema ∞^6. Ciò si può facilmente dimostrare osservando che le rette di S_5 sono ∞^8 e che ogni retta appartiene ad ∞^2 V_3^3. Osserviamo che per tre piani del complesso γ passa una sola V_3^3 e quindi per tre punti generici dell'S'_1 in esame passa una sola catena.

2. Equazioni parametriche della V^3_3.

Le equazioni parametriche del piano π di γ sono:

$$(\pi)\quad \begin{cases} \rho_1 = \lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_4 \\ \rho_2 = \lambda_1 z_2 \\ \rho_3 = \lambda_3 z_3 \\ \rho_4 = \lambda_1 z_6 + \lambda_2 z_4 \\ \rho_5 = \lambda_2 z_5 \\ \rho_6 = \lambda_3 z_6 \end{cases}$$

ottenute facendo la combinazione lineare delle tre righe della matrice O'_x secondo i parametri omogenei λ_1 λ_2 e λ_3,

Se $A\ (a_1 \ldots . a_6)$ e $B\ (b_1 \ldots . b_6)$ sono due punti dell'S_6 ambiente, le equazioni parametriche nella retta s congiungente tali punti sono:

$$(s)\quad \begin{cases} z_1 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_1 \\ z_2 = \mu_1 a_2 + \mu_2 b_2 \\ z_3 = \mu_1 a_3 + \mu_2 b_3 \\ z_4 = \mu_1 a_4 + \mu_2 b_4 \\ z_5 = \mu_1 a_5 + \mu_2 b_5 \\ z_6 = \mu_1 a_6 + \mu_2 b_6 \end{cases}$$

Le equazioni parametriche della V_3^3 descritta dal piano π mentre il punto P $(z_1 \ldots z_6)$ varia nella retta (s) sono quindi:

$$(V_3^3)\begin{cases} \rho_1 = \lambda_1(\mu_1 a_3 + \mu_2 b_3) + \lambda_2(\mu_1 a_1 + \mu_2 b_1) \\ \rho_2 = \lambda_2(\mu_1 a_2 + \mu_2 b_2) \\ \rho_3 = \lambda_3(\mu_1 a_3 + \mu_2 b_3) \\ \rho_4 = \lambda_1(\mu_1 a_6 + \mu_2 b_6) + \lambda_2(\mu_1 a_4 + \mu_2 b_4) \\ \rho_5 = \lambda_2(\mu_1 a_5 + \mu_2 b_5) \\ \rho_6 = \lambda_3(\mu_1 a_6 + \mu_2 b_6) \end{cases}$$

Se $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ si considerano come coordinate omogenee del punto X variabile in un piano e $\mu_1\ \mu_2$ come coordinate omogenee del punto Y variabile in una retta, le equazioni parametriche della varietà $V^3{}_3{}^*$ di SEGRE corrispondente alle coppie di punti di una retta e di un piano sono:

$$(V_3^{3*})\begin{cases} x_1 = \lambda_1\ \mu_1 \\ x_2 = \lambda_2\ \mu_1 \\ x_3 = \lambda_3\ \mu_1 \\ x_4 = \lambda_1\ \mu_2 \\ x_5 = \lambda_2\ \mu_2 \\ x_6 = \lambda_3\ \mu_2 \end{cases}$$

e sostituendo nelle equazioni parametriche della V_3^3. queste diventano:

$$(*)\begin{cases} \rho_1 = a_3 x_1 + a_1 x_2 + b_3 x_4 + b_1 x_5 \\ \rho_2 = a_2 x_2 + b_2 x_5 \\ \rho_3 = a_3 x_3 + b_3 x_6 \\ \rho_4 = a_6 x_1 + a_4 x_2 + b_6 x_4 + b_4 x_5 \\ \rho_5 = a_5 x_2 + b_5 x_5 \\ \rho_6 = a_6 x_3 + b_6 x_6 \end{cases}$$

Sicchè la V_3^3 è la trasformata della V_3^{3*} di SEGRE mediante la proiettività di S_5 di equazioni *(*)*. Tale proiettività al variare della retta che determina la V_3^3 descrive un sistema lineare di proiettività formanti gruppo e precisamente, come vedremo, costituisce il gruppo delle proiettività di S_5 immagine del gruppo delle proiettività dell'S_4 proiettivo di 1ª specie di STUDY.

3. Le proiettività nell' S_4' di prima specie di Study.

Indicando con (α, β) e (α', β') le coordinate di due punti di S'_4 consideriamo le sostituzioni lineari:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha' = A\alpha + B\beta \\ \beta' = C\alpha + D\beta \end{cases}$$

Poniamo:

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3 \\ \beta = z_4 u_1 + z_5 u_2 + z_6 u_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha' = z'_1 u_1 + z'_2 u_2 + z'_3 u_3 \\ \beta' = z'_4 u_1 + z'_5 u_2 + z'_6 u_3 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} A = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \\ B = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = a_4 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3 \\ D = b_4 u_1 + b_5 u_2 + b_6 u_3 \end{cases}$$

Sostituendo nella (1) le (2) e (3), eseguendo i prodotti ed eguagliando i coefficienti delle unità u_1 u_2 e u_3 si ottiene la sostituzione lineare nelle sei variabili $z'_1 \ldots \cdot z'_6$ equivalente alla sostituzione lineare (1) nell'algebra in considerazione:

$$(4)\quad \begin{cases} z'_1 = a_3 z_1 + a_1 z_2 + b_3 z_4 + b_1 z_5 \\ z'_2 = \quad a_2 z_2 + \quad b_2 z_5 \\ z'_3 = \quad a_3 z_3 + \quad b_3 z_6 \\ z'_4 = a_6 z_1 + a_4 z_2 + \quad b_6 z_4 + b_4 z_5 \\ z'_5 = \quad a_5 z_2 + \quad b_5 z_5 \\ z'_6 = \quad a_6 z_3 + \quad b_6 z_6 \end{cases}$$

che determina nell'S_5 una proiettività (immagine della proiettività di equazioni (1) sulla retta di Study). Variando A, B, C, D, si ha in S_5 un sistema lineare di proiettività formanti gruppo rappresentato dalle (4) al variare di a_i e b_i. Confrontando la matrice delle (4) con la matrice delle (*) risulta che la V_3^3 di equazioni parametriche (V_3^3) è la trasformata della V_3^{3*} di Segre mediante la proiettività di eq. (4) e quindi: *L'insieme di tutte le V_3^3 rappresentanti le catene monodimensionali dell' S'_1 si ottengono trasformando la V_3^{3*} di Segre col gruppo delle proiettività di S_5 immagine del gruppo di proiettività dell' S'_1 di* Study.

Osserviamo che tale gruppo di proiettività ammette come sottogruppo il gruppo equivalente [1]) determinato nell'S_5 dall' algebra di Study e la matrice quadrata del gruppo equivalente è formata con quattro matrici quadrate di ordine 3, di cui quelle nella diagonale principale uguali alla trasposta della matrice sinistra dell'elemento corrente nell'algebra in esame e le altre uguali alla matrice nulla.

---

[1]) v. N. Spampinato, « *Le riemanniane degli* S_r *ipercomplessi* ». Rend. Accademia di Sc. fis. e mat., Serie IV, vol. XIII, 1942-43.

Ricerche sull'azione catalitica delle soluzioni solide tra sesquiossidi nella decomposizione termica del protossido di azoto

Nota del prof. **Vittorio Cirilli**, *presentata dal socio ord.* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 8 maggio 1948)

Sunto. — L'autore ha studiato l'azione catalitica che le soluzioni solide appartenenti ai sistemi $Al_2O_3 - Fe_2O_3$, $Al_2O_3 - Cr_2O_3$, $Fe_2O_3 - Cr_2O_3$ esercitano nella decomposizione termica del protossido di azoto. Nel caso della coppia $Al_2O_3 - Fe_2O_3$ è stato osservato che il calore di attivazione della reazione di decomposizione è particolarmente basso allorchè la soluzione solida di contatto, ad elevato contenuto di Fe_2O_3, si trova sotto la forma cubica γ. Questa diminuzione del calore di attivazione, viene posta in relazione con il più alto contenuto energetico del catalizzatore e quindi con la sua instabilità.

Per le coppie $Al_2O_3 - Cr_2O_3$ e $Fe_2O_3 - Cr_2O_3$ non si hanno solidi dotati di elevate proprietà catalitiche, per la reazione indicata, ed i calori di attivazione sono intermedi tra quelli determinati sperimentando con gli ossidi costituenti.

Sistema $Al_2O_3 - Fe_2O_3$

In una nota precedente [1]) ho riferito sulle ricerche da me eseguite allo scopo di definire le proprietà magnetiche delle soluzioni solide tra i due ossidi. Queste erano state preparate per precipitazione contemporanea, con ammoniaca, delle soluzioni miste dei due nitrati e successivo riscaldamento dei solidi così ottenuti a temperature stabilite e gradualmente crescenti.

Osservai allora che i materiali a contenuto di Fe_2O_3 non superiore al 67 %, sottoposti a trattamento termico a 600° e 850°, presentavano una suscettività magnetica particolarmente elevata. Questa elevata suscettività venne attribuita, in base alle osservazioni roentgenografiche, al formarsi di soluzioni solide di $\gamma\, Al_2O_3$ e $\gamma\, Fe_2O_3$, quest'ultimo fortemente ferromagnetico.

Per quantitativi di ossido ferrico superiori al 67 % o per temperature di trattamento più elevate (1000°), la suscettività diminuiva invece notevolmente, in corrispondenza all'assetto romboedrico, più stabile, assunto dai due sesquiossidi e dalle loro soluzioni solide.

È noto che l'ossido di ferro cubico è metastabile rispetto al rombo-

[1]) V. Cirilli, Gazzetta chimica, 77, 255 (1947).

edrico ($\alpha\ Fe_2O_3$). Analogamente accadendo per $\gamma\ Al_2O_3$, metastabile rispetto all'ossido α, si deduce che le soluzioni solide cubiche tendono a trasformarsi nelle romboedriche per riscaldamento a temperatura elevata e tanto più facilmente quanto maggiore è il loro contenuto di Fe_2O_3.

Ho voluto per tale ragione osservare se al più elevato livello energetico delle soluzioni solide γ corrisponde un'attività catalitica maggiore di quella presentata dalle soluzioni romboedriche.

Su queste ultime la letteratura riporta un lavoro di J. Eckell [1]) il quale ha studiato la cinetica della reazione: $2CO + O_2 \longrightarrow 2CO_2$ usando come catalizzatore soluzioni solide $Fe_2O_3 - Al_2O_3$ appartenenti al tipo romboedrico.

Questo studioso ha osservato che il calore di attivazione della reazione diminuisce con l'aumentare del quantitativo di allumina disciolta, fino al limite $Al_2O_3 = 25\%$, corrispondente alla saturazione.

Nello studio di cui do conto con la nota presente ho preso in esame la reazione di decomposizione $2N_2O \longrightarrow 2N_2 + O_2$, molto nota, specie per gli studi di catalisi eterogenea di G. M. Schwab e Coll. [2]) e di G. F Hüttig e Coll. [3]).

L'attrezzatura sperimentale che ho adoperato è del tutto simile a quella descritta precedentemente nello studio di alcuni equilibri di riduzione [4]) e permette la rapida circolazione di un miscuglio gassoso in contatto con un solido mantenuto a temperatura costante. Un manometro ed un analizzatore continuo a ponte di Wheatstone permettono di seguire con facilità il decorso della reazione.

In tutte le esperienze ho mantenuto costante il volume del catalizzatore (cc. 0,7) il quale è stato diluito con un volume uguale di quarzo in granelli e precedentemente stabilizzato con riscaldamento di cinque ore a 700°.

Il protossido di azoto l'ho ottenuto per reazione del cloridrato di idrossilammina con nitrito sodico, metodo questo che permette di ottenere con facilità un gas molto puro.

La quantità del catalizzatore e l'intervallo di temperatura entro il quale sono state eseguite le esperienze: 400°-525°, sono stati scelti in modo da

---

[1]) J. Eckell, Z. Elektrochem., *39*, 807 (1933).

[2]) G. M. Schwab. R. Staeger, H. H. v. Baumbach, Z. physik. Chem., B *21*, 65 (1933); G. M. Schwab, R. Staeger, Z. physik. Chem., B 25, 418 (1934) e molti altri.

[3]) G. F. Hüttig, Z. Elektrochem., *44*, 571 (1938), dove è riportata l'indicazione di alcuni lavori precedenti.

[4]) G. Malquori, V. Cirilli, Gazzetta chimica, *75*, 137 (1945).

assicurare una velocità di circolazione del gas sensibilmente più elevata della velocità di reazione. Nel caso in questione risulta agevole determinare tali grandezze poichè, per una data quantità di solido di contatto e per temperature inferiori ad un certo valore limite, si osserva che il log C_{N_2O} è una funzione lineare del tempo, come deve essere nel caso di una reazione del primo ordine.

Per lo stesso intervallo di temperatura la decomposizione del protossido

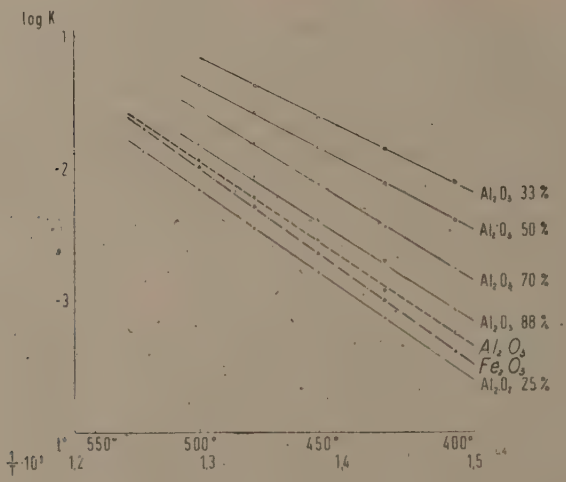


Fig. 1.

di azoto, in assenza del catalizzatore, è del tutto trascurabile anche dopo molte ore di circolazione.

La pressione di esperienza è stata in tutti i casi mantenuta entro 200 e 350 mm. di mercurio.

Nella tabella seguente e nella fig. 1 riporto i logaritmi delle costanti di velocità ottenute alle varie temperature con i solidi di contatto delle composizioni indicate (i valori sono riferiti al tempo di un minuto primo).

TABELLLA I.

log 1/k

Al_2O_3 %	Fe_2O_3 %	400°	425°	450°	475°	500°	525°
100	—	3,25	2,92	2,54	2,22	1,94	—
88	12	3,08	2,71	2,40	2,07	1,83	—
70	30	2,77	2,45	2,13	1,81	1,57	—
50	50	2,40	2,12	1,85	1,58	1,38	—
33	67	2,12	1,87	1,63	1,39	—	—
25	75	—	3,14	2,79	2,45	2,17	1,87
—	100	3,39	3,00	2,64	2,29	1,99	1,70

La costante di velocità e la temperatura di reazione sono tra di loro legate dalla relazione di Arrhenius

$$k = a.\ e^{-\frac{E}{RT}}$$

dalla quale il calore di attivazione E può essere calcolato dalla inclinazione della curva (una retta): log k—reciproco della temperatura assoluta.

Trattandosi di catalisi eterogenea il calore di attivazione così determinato è naturalmente quello apparente; esso è legato alla efficienza del catalizzatore nel senso che quanto maggiore è l'influenza di quest'ultimo nell'accelerare la reazione, tanto più piccolo sarà il valore di E.

Il coefficiente a, la cosidetta « attività », dipende, oltre che dalla probabilità che avvenga la reazione di decomposizione, dal numero dei centri attivi e quindi dal metodo seguito nella preparazione del catalizzatore ed in genere dalla sua storia.

Nella tab. II e nella fig. 2 riporto i valori calcolati sia per il calore di attivazione, sia per il *log a*, in funzione della composizione della massa di contatto.

TABELLA II.

Al_2O_3 %	Fe_2O_3 %	E, Cal.	log a
100	—	30,9	6,8
88	12	30,2	6,7
70	30	28,7	6,6
50	50	24,6	5,6
33	67	22,0	5,0
25	75	31,8	6,8
—	100	33,1	7,4

Se ne deduce che il calore di attivazione diminuisce con l'aumentare del γFe_2O_3 contenuto e quindi con il crescere della instabilità del solido.

L'ossido di ferro γ cubico tende infatti a trasformarsi nella forma più stabile già per riscaldamento verso i 300°; la permanenza dell'assetto cri-

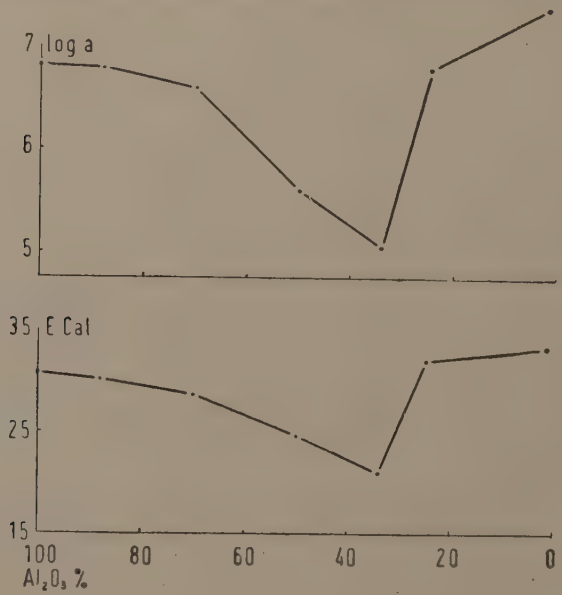


Fig. 2

stallino regolare nelle soluzioni solide, alle condizioni di esperienza indicate, deve attribuirsi al fatto che l'allumina γ, anch'essa cubica e più stabile ($\gamma\, Al_2O_3 \longrightarrow \alpha\, Al_2O_3 \sim 1000°$), obbliga l'ossido ferrico con il quale

trovasi associata, a mantenere tale assetto. I solidi di contatto sono per questa ragione tanto più metastabili quanto maggiore è il contenuto di ossido ferrico.

Nel caso della soluzione solida contenente il 75 % di Fe_2O_3 l'assetto cristallino è del tipo romboedrico; il calore di attivazione è leggermente inferiore a quello ottenuto con α Fe_2O_3 e ciò sembra confermare quanto precedentemente osservato da J. Eckell [1]).

Dalla tabella II si deduce anche che, parallelamente al calore di attivazione, diminuisce il *log a* e di conseguenza il numero dei centri attivi che di esso è funzione.

Un andamento di questo genere è molto comune ed è stato in particolare osservato da G. F. Hüttig nei suoi studi sull'attività catalitica di molti solidi [2]).

Ciò indica che un più piccolo valore di E e quindi un aumento della velocità di reazione, viene parzialmente compensato da una diminuzione del numero dei centri che nel solido di contatto possiedono una più elevata attività catalitica.

Da quanto è stato osservato si può dedurre che il γ Fe_2O_3 dovrebbe essere un energico catalizzatore della reazione di decomposizione del protossido di azoto. Una conferma sperimentale di tale deduzione non mi è stato però possibile ottenerla a causa della facilità con la quale avviene la trasformazione $\gamma \longrightarrow \alpha$ già per riscaldamento a temperature intorno a 300°. Al disotto di tale temperatura la decomposizione del protossido non ha una velocità apprezzabile.

Sistemi $Al_2O_3 - Cr_2O_3$ e $Fe_2O_3 - Cr_2O_3$.

L'ossido di cromo, preparato per disidratazione a 700° dell'idrossido, è un catalizzatore di scarsa efficienza nella decomposizione del protossido di azoto come dimostra il calore di attivazione piuttosto elevato: 36,9 Cal.

Con l'ossido ferrico il Cr_2O_3 dà origine ad una serie continua di cristalli misti appartenenti al tipo romboedrico; con l'ossido di alluminio la solubilità è invece limitata e, per temperature di riscaldamento fino a 850°, è possibile ottenere solidi del tipo dell'allumina γ contenenti fino a 33 % di Cr_2O_3. [3]).

---

[1]) l. c.

[2]) G. F. Hüttig, l. c.; R. H. Griffith, *The mecanism of contact catalysis*, Oxford University Press (1946); G. M. Schwab, *Catalysis*, tradotto dal tedesco da H. S. Taylor e R. Spence, Londra, MacMillan (1937).

[3]) V. Cirilli, l. c.

La cinetica della reazione mostra che i solidi appartenenti a questi due sistemi sono dei catalizzatori mediocremente attivi e che i calori di attivazione sono intermedi tra quelli determinati sperimentando con gli ossidi costituenti.

La reazione non è sempre strettamente del primo ordine; si osserva infatti a volte che la costante della velocità diminuisce leggermente con il procedere della decomposizione.

L' aumento dell' ordine apparente della reazione è probabilmente dovuto al ritardo provocato dall' adsorbimento dell' ossigeno formatosi nella decomposizione, come si può dedurre dal comportamento che si osserva in seguito all' aggiunta di quantità note di tale gas.

Un comportamento analogo è stato notato in vari casi da G. M. Schwab e Coll. [1]).

Napoli, Istituto di Chimica industriale dell' Università.

Le variazioni della latitudine ed il movimento del Polo di rotazione della terra durante l' anno 1947

Nota del socio ordinario **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 8 maggio 1948)

Sunto. — Seguendo i metodi abituali, e servendosi delle osservazioni fatte nelle Stazioni internazionali di latitudini di Mizusawa, Carloforte, Gaithersburg ed Ukiah, vengono ricavate le coordinate del Polo istantaneo di rotazione della Terra durante il corso dell'anno 1947. Si coglie questa occasione per rettificare lievemente i risultati degli ultimi tre mesi del precedente anno 1946, in seguito ad un lieve errore di trascrizione, constatato solo quando la relazione concernente quei risultati, pubblicati in nota precedente, erano già stampati.

Nella Nota mia precedente relativa al movimento del Polo negli anni 1945 e 46, presentata nella seduta del gennaio del corrente anno, dicevo, che con essa si esauriva il periodo bellico, e che contavo poter riprendere il ritmo antico e pubblicare nella primavera i risultati concernenti l' anno immediatamente precedente così come sempre si era fatto prima, fin dal-

[1]) l. c.

l'anno 1901 per cura dell'Ufficio Centrale di Potsdam, poi del prof. KIMURA, e finalmente mia fino al 1940. Sono ben lieto di poter mantenere oggi con la presente l'impegno. Con ciò pur troppo non posso però ancora dire, che si è proprio ritornati alla normalità del passato: avevamo allora un complesso di ben otto Stazioni, che attendevano a queste ricerche, ed oggi malauguratamente una è stata pur troppo distrutta (Batavia), e due per ragioni diverse hanno sospeso i loro lavori (Adelaide e La Plata), facendoci così mancare completamente il contributo e controllo dell'emisfero australe. Per fortuna, come mi auguravo nel gennaio scorso, la Stazione russa di Kitab è sempre in piena e completa attività, e proprio mentre ero intento ai calcoli, che formano argomento di questa nota, è giunto un gruppo di libretti di osservazione che comprendono il periodo dall'aprile 1946 al settembre 1947. Per non rimandare troppo la pubblicazione di questi primi risultati, non ho creduto attendere il calcolo delle osservazioni di Kitab, anche perchè mancando gli ultimi quattro mesi del 1947, sarei stato ugualmente costretto a riprendere poi in esame questo periodo appena mi saranno giunte le osservazioni mancanti. Poichè tutto mi fa credere, che non tarderà molto l'arrivo dei libretti mancanti, mi riservo comunicare in una nota ulteriore i valori più precisi, che potrò rivare in seguito tenendo conto di tutte le cinque stazioni boreali.

In complesso il lavoro è proceduto regolarmente in tutte le Stazioni, ove si è fatto un numero di osservazioni superiore alla media: solo a Carloforte questo non si è verificato, ma ciò non per minor diligenza dell'osservatore, o per inclemenza del tempo, ma solamente perchè mentre nel passato erano stati sempre disponibili due osservatori (come del resto a Mizusawa ed a Kitab), ora da quanto si è ripreso il servizio presso quella stazione, non si riesce ad ottenere che un secondo astronomo possa esser mandato a Carloforte.

Il personale delle Stazioni non ha subìto variazioni in confronto agli anni precedenti, e da parte dell'Ufficio centrale non sono state introdotte variazioni nè nei sistemi di calcolo, nè nei valori delle costati strumentali adottate provvisoriamente nei decorsi anni. Pur troppo l'Ufficio centrale non è riuscito ancora ad ottenere dalle Stazioni di Carloforte e di Gaithersburg i risultati della determinazione degli errori delle viti dei micrometri dei due strumenti. Le Stazioni di Mizusawa, Carloforte, Kitab ed Ukiah numerose osservazioni di coppie stellari, scelte fra quelle dell'elenco proposto dal KIMURA, per la determinazione del valore angolare della rotazione del micrometro. Queste osservazioni sono ora in corso di calcolo.

Il quadro seguente, che riassume il lavoro di osservazione fatto nelle stazioni, è disposto secondo lo schema abituale di tutti gli anni; nell'ultima colonna è contenuto il numero medio di coppie osservate annualmente dalle diverse stazioni nel periodo che va dal 1935 alla fine del 1946.

STAZIONI	Osserv. sera	Osserv. mattino	TOTALE	Media precedente
Mizusawa	713	617	1330	1291
Kitab	—	—	—	1512
Carloforte	727	673	1400	1598
Gaithersburg	846	779	1625	1303
Ukiah	1055	985	2040	1347
Totale	3341	3054	6395	7051

Distinguendo al solito i risultati a seconda che ottenuti nelle diverse stazioni da osservazioni del gruppo serale o del mattino, e riferendoci alle latitudini medie di ognuna di esse, si sono ricavati per le diverse epoche medie delle osservazioni di ciascuna combinazione di gruppi le variazioni della latitudine istantanea, contenute nella tabella I che segue. In essa, come al solito è indicato il numero delle coppie osservate in quel periodo da ciascuna stazione.

Con questi valori delle variazioni di latitudine vennero calcolate le coordinate istantanee x ed y del Polo istantaneo, che vediamo riportate nella tabella II. Di esse troviamo nelle colonne II, III, V, VI, i valori ricavati rispettivamente dalle osservazioni del gruppo serale, e da quelle del gruppo del mattino, e nelle colonne IV e VII la media di questi due valori. L'accordo fra i valori, ricavati in modo completamente indipendente servendosi di stelle diverse, può considerarsi buono, e per i mesi in cui le osservazioni sono più numerose anzi ottimo, non avendosi scarti, che sorpassino i 0″.03 dal valore medio adottato. La tabella II contiene poi nelle tre ultime colonne il termine residuo z, che può esser considerato come dovuto essenzialmente alla correzione delle declinazioni stellari ammesse per il gruppo di coppie osservate in quel periodo. Da ciò l'accordo, che presentano le z serali di ciascun mese, contenute nella colonna VIII con quello dello stesso gruppo osservato nel mese precedente e contenuto nella colonna penultima, ma nella riga precedente. Di questi due valori l'ultima colonna contiene la media, che si accorda perfettamente col valore medio ottenuto negli anni precedenti.

Tabella I.

Osservazioni della sera.

Epoca	Mizusawa		Carloforte		Gaithersb.		Ukiah	
1947	$\varphi - \varphi_0$ "	Num. oss.	$\varphi - \varphi_0$ "	Num. oss.	$\varphi - \varphi_0$ "	Num. oss.	$\varphi - \varphi_0$ "	Num. oss.
.06	+0.065	52	+0.091	30	−0.074	45	−0.104	106
.14	— .001	63	— .186	35	— .266	58	— .228	71
.22	+ .152	61	+ .004	51	— .042	55	+ .113	63
.31	+ .069	88	— .253	72	— .085	73	+ .136	90
.39	— .080	74	— .304	66	— .121	79	+ .140	101
.47	— .214	38	— .379	59	— .025	60	+ .113	102
.56	— .275	37	— .221	78	+ .010	72	+ .050	118
.63	— .275	82	+ .009	84	+ .202	62	+ .194	102
.72	— .272	45	+ .153	59	+ .258	102	— .163	98
.81	— .282	73	+ .245	70	+ .227	73	+ .127	77
.88	— .418	55	+ .086	68	+ .003	80	— .138	82
.97	— .174	45	+ .388	55	+ .275	87	+ .156	45

Osservazioni del mattino.

Epoca	Mizusawa		Carloforte		Gaithersb.		Ukiah	
1947	$\varphi - \varphi_0$ "	Num. oss.	$\varphi - \varphi_0$ "	Num. oss.	$\varphi - \varphi_0$ "	Num. oss.	$\varphi - \varphi_0$ "	Num. oss.
.06	— .084	46	— .024	20	— .205	24	— .294	102
.14	+ .141	50	+ .018	31	— .045	70	+ .062	58
.22	+ .117	69	— .122	54	— .181	55	+ .078	58
.30	+ .101	87	— .239	66	— .172	56	+ .115	89
.39	— .086	56	— .406	66	— .118	77	+ .070	91
.47	— .168	39	— .279	51	— .044	52	+ .080	101
.56	— .129	31	— .058	76	+ .189	55	+ .180	113
.64	— .176	66	+ .093	85	+ .198	71	+ .219	101
.72	— .176	37	+ .168	54	+ .297	95	+ .218	93
.80	— .435	61	+ .066	62	+ .065	72	— .081	76
.88	— .177	48	+ .427	57	+ .309	67	+ .105	66
.97	— .229	27	+ .277	51	+ .160	85	+ .064	37

Tabella II.

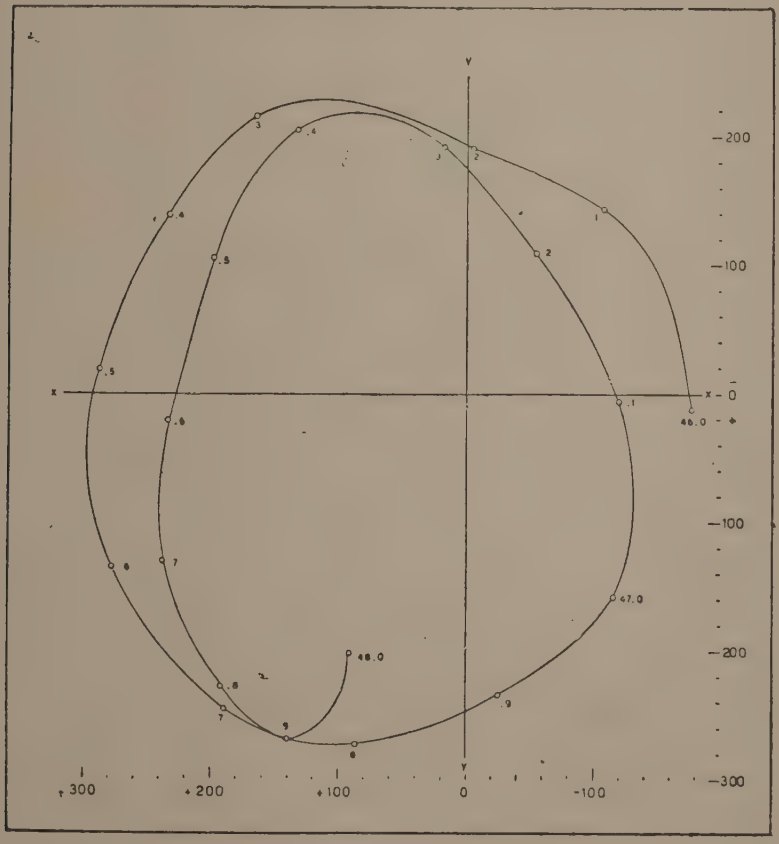
Epoca	x_s	x_m	X	y_s	y_m	Y	z_s	z_m	Z
	"	"	"	"	"	"	'	"	
6.97	+ .219	+ .167	+ .193	− .035	− .059	− .047	+ .139	+ .090	"
7.06	+ .049	+ .082	+ .066	− .119	− .135	− .127	+ .027	− .114	+ .058
.14	− .040	− .063	− .052	− .104	− .067	− .086	− .159	+ .060	− .137
.22	− .089	− .150	− .119	− .050	− .066	− .058	+ .067	− .014	+ .063
.31	− .211	− .182	− .196	+ .048	+ .035	+ .042	− .052	− .088	− .033
.39	− .191	− .223	− .207	+ .119	+ .126	+ .122	− .128	− .174	− .108
.47	− .166	− .120	− .143	+ .230	+ .163	+ .196	− .191	− .149	− .182
.56	− .036	− .019	− .028	+ .208	+ .211	+ .210	− .164	− .010	− .156
.64	+ .067	+ .070	+ .068	+ .272	+ .210	+ .241	− .036	+ .031	− .023
.72	+ .159	+ .124	+ .142	+ .243	+ .225	+ .234	+ .017	+ .069	+ .024
.80	+ .220	+ .221	+ .221	+ .199	+ .184	+ .191	+ .034	− .138	+ .052
.88	+ .236	+ .297	+ .267	+ .127	+ .126	+ .126	− .143	+ .142	− .140
.97	+ .256	+ .230	+ .243	+ .139	+ .118	+ .128	+ .132	+ .044	+ .137

Con le coordinate medie concluse per il Polo istantaneo x ed y della tabella II si sono graficamente conguagliate con tratto continuo, raccordandole all'andamento presentato dalle x delle y ottenute alla fine del 1946, e proprio per ottenere questo raccordo è venuto alla luce un piccolo errore. Nel riferire sui risultati ottenuti alla fine del 1946, avevo dovuto avvertire una lieve discontinuità di andamento negli ultimi mesi; ma poichè proprio in quell'epoca oltre al mancare dei dati di osservazione di Kitab, erano venuti a mancare pur quelli di Ukiah, avevo creduto poter attribuire quel fatto alla insufficienza di osservazioni e contavo chiarire il punto quando fossero giunti i libretti di Kitab. Ma la sicura continuità delle curve trovate per il 47, non accordandosi con le precedenti così come sarebbe stato desiderabile, e si era trovato sempre negli anni precedenti, mi fece riprendere in esame l'ultimo periodo del 1946, e scoprire in un certo punto un banale errore di copiatura, che ha portato a dover rettificare leggermente il valore della x per l'epoca 1946.72. Questo ha portato ad una rettifica della curva per le epoche immediatamente vicine (1946.7 e 1946.8) mentre il valore ultimo del 1946.9 ha dovuto esser rettificato esso pure per sostituire ai valori estrapolati e quindi incerti per il 1947.0, quelli risultanti ora dalle osservazioni fatte nel gennaio 1947. Per questa ragione ho creduto dover aggiungere nella tabella III ai valori delle coordinate istantanee del Polo relative al 47. anche quelli dei tre ultimi decimi di anno del 1946 (colonne II e III) tre prime linee della tabella. Per il resto la tabella III, disposta come negli anni precedenti, contiene gli scostamenti,

che per le diverse longitudini di due in due ore a partire dal meridiano di Greenwich, risultano per le latitudini istantanee in confronto alle medie, essendo al solito

$$\varphi - \varphi_0 = x \cdot \cos\lambda + y \cdot \sin\lambda$$

ove con φ, e φ_0 si indichino rispettivamente le latitudini istantanea e media, con λ la longitudine da Greenwich, ed x ed y sono le coordinate istantanee del Polo date le colonne II e III della tabella.



Con le x ed y di questa tabella è stata disegnata la polodia, che si vede riprodotta nel disegno. Il Polo, che negli ultimi anni si era sensibilmente scostato dalla posizione media, ha incominciato a restringere la spira nei primi mesi lentamente, per dirigersi alla fine decisamente verso il polo medio.

TABELLA III.

EPOCA	x	y	Longitudini occidentali						0h	Longitudini orientali					
			+12h	+10h	+8h	+6h	+4h	+2h		−2h	−4h	−6h	−8h	−10h	−12h
1940 +															
6.7	+".244	+".189	−".244	−".117	+".042	+".189	+".286	+".306	+".244	+".117	−".042	−".189	−".286	−".306	−".244
6.8	+ .272	+ .086	− .272	− .193	− .062	+ .086	+ .210	+ .279	+ .272	+ .193	+ .062	− .086	− .210	− .279	− .272
6.9	+ .232	− .026	− .232	− .218	− .139	− .026	+ .093	+ .192	+ .232	+ .218	+ .139	+ .026	− .093	− .192	− .232
7.0	+ .158	− .116	− .158	− .195	− .179	− .116	− .021	+ .079	+ 158	+ .195	+ .179	+ .116	+ .021	− .079	− .158
7.1	+ .005	− .120	− .005	− .064	− .106	− .120	− .101	− .056	+ .006	+ .064	+ .106	+ .120	+ .101	+ .056	− .005
7.2	− .110	− .054	+ .110	+ .068	+ .008	− .054	− .102	− .122	− .110	− .068	− .008	+ .054	+ .102	+ .122	+ .110
7.3	− .193	+ .019	+ .193	+ .176	+ .113	+ .019	− .080	− .157	− .193	− .176	− .113	− .019	+ .080	+ .157	+ .193
7.4	− .206	+ .134	+ .206	+ 245	+ .219	+ .134	+ .013	− .111	− .206	− .245	− .219	− .134	− .013	+ .111	+ .206
7.5	− .106	+ .200	+ .106	+ .192	+ .226	+ .200	+ .120	+ .008	− .106	− .192	− .226	− .200	− .120	− .008	+ .106
7.6	+ .020	+ .234	− .020	+ .100	+ .193	+ .234	+ .213	+ .134	+ .020	− .100	− .193	− .234	− .213	− .134	− .020
7.7	+ .130	+ .238	− .130	+ .006	+ .141	+ .238	+ .271	+ .231	+ .130	− .006	− .141	− .238	− .271	− .231	− .130
7.8	+ .227	+ .192	− .227	− .101	+ .053	+ .192	+ .280	+ .293	+ .227	+ .101	− .053	− .192	− .280	− .293	− .227
7.9	+ .268	+ .140	− .268	− .162	− .013	+ .140	+ .255	+ .302	+ .268	+ .162	+ .013	− .140	− .255	− .302	− .268
8.0	+ .202	+ .091	− .202	− .129	− .022	+ .091	+ .180	+ .220	+ .202	+ .129	+ .022	− .091	− .180	− .220	− .202

Capodimonte, 4 Maggio 1948.

Sulla restituzione prospettica col quadro inclinato

Nota del Prof. **Mario Giovanardi**, *presentata dal socio corrisp.* **Mario Pascal**

(Adunanza del dì 5 giugno 1948)

Sunto. — In questa nota abbiamo esposto brevemente alcune norme fondamentali inerenti alla restituzione prospettica di un oggetto quando si hanno una o più prospettive di esso su un quadro inclinato, anzicchè verticale, come si usa generalmente. Tali norme sono largamente applicate nella Fotogrammetria, scienza che ci permette di rilevare con una o più fotografie di un oggetto, eseguite con l'apparecchio fotografico, anche inclinato, le dimensioni dell' oggetto medesimo, e quindi ricostruirlo in vera forma e grandezza nelle sue diverse proiezioni orizzontali e verticali.

Una delle più interessanti applicazioni della Geometria Descrittiva è la Fotogrammetria, la quale, come indica l'etimologia della parola stessa ci permette di prendere delle misure a mezzo di fotografie. È notevole oltremodo l'importanza di tale scienza, applicata all'Architettura, perchè ci fa rilevare le parti inaccessibili di un edificio e controllare anche misure di esso prese coi mezzi ordinari, potendo così ricostruirlo in vera forma e grandezza nelle sue diverse proiezioni orizzontali e verticali.

La prospettiva di un oggetto è l'immagine di esso ottenuta secando con un piano supposto trasparente, detto quadro, i raggi visuali che, partendo dall'occhio di un osservatore, colpiscono i differenti punti dell'oggetto situato da parte opposta dell'occhio stesso rispetto al quadro; essa è quindi la proiezione centrale dell'oggetto quando si consideri come centro di proiezione uno degli occhi di un osservatore.

La fotografia di un oggetto si può paragonare alla prospettiva di esso, supponendo sostituiti rispettivamente al quadro ed all'occhio di un osservatore la lastra e l'obiettivo di un apparecchio fotografico, con la differenza che nella fotografia si ha l'immagine capovolta dell'oggetto medesimo perchè questo ed il centro di proiezione sono da una stessa parte rispetto al quadro.

Ricordiamo alcune nozioni di prospettiva lineare conica. Siano (Fig 1):

V il centro di vista.

π il piano fondamentale, orizzontale, detto anche geometrale, su cui poggia l'oggetto.

χ il quadro della prospettiva inclinato al geometrale dell'angolo φ.

π' il piano condotto per V parallelamente al geometrale, detto piano di orizzonte.

t la retta d'intersezione del quadro col piano π, detta fondamentale o linea di terra.

o la retta di intersezione del quadro col piano π', detta orizzonte.

V' la proiezione ortogonale del centro di vista sul geometrale, detto punto stazione.

V_o la proiezione ortogonale di V sul quadro, detta punto principale.

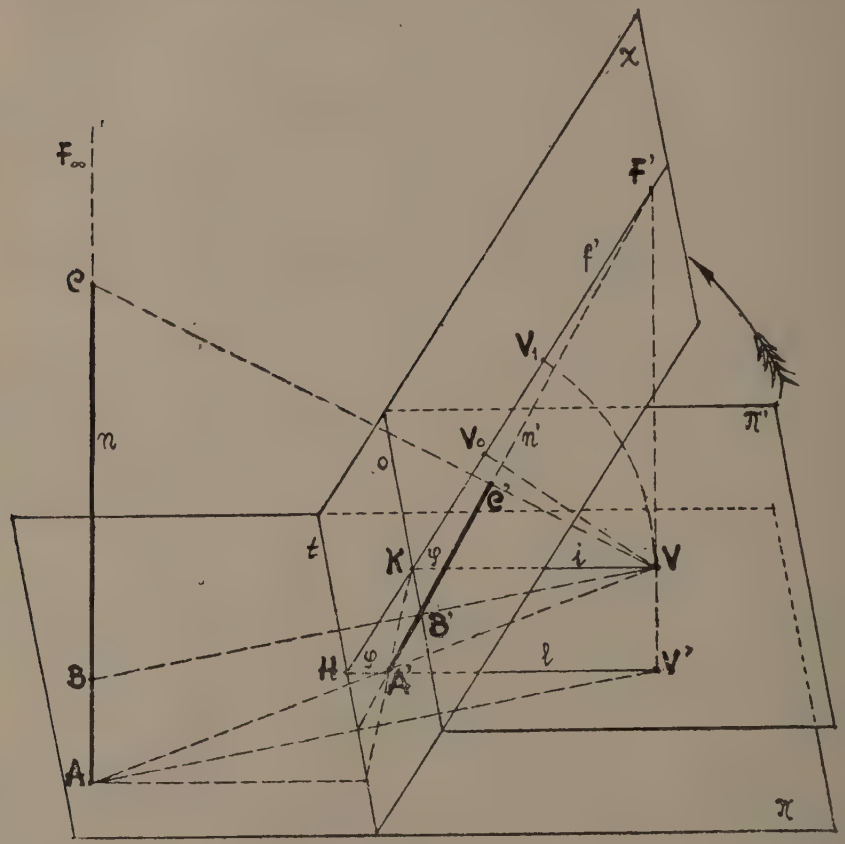


Fig. 1.

Il cerchio descritto nel quadro col centro in V_o e di raggio eguale al segmento $V\ V_o$, distanza principale, è il cerchio di distanza.

Il piano condotto per V perpendicolarmente al quadro e al geometrale, detto piano visuale principale, seca il quadro nella retta f' perpendicolare all'orizzonte, alla quale appartiene il punto F', punto di fuga di tutte le rette perpendicolari al geometrale, ovvero l'antipolo dell'orizzonte o, (retta di fuga del geometrale), rispetto al cerchio di distanza.

Il punto V_o, a differenza della prospettiva col quadro verticale, è

esterno alla retta o; il punto F' si troverà superiormente o inferiormente all'orizzonte, secondo che il quadro è inclinato in un senso o nell'altro; nel primo caso si ha la prospettiva cosiddetta dal basso in alto, nel secondo la prospettiva dall'alto in basso. Nella Fig. 1 il quadro si è disposto per la prospettiva dal basso in alto.

Se sono note una o più prospettive di un oggetto rispettivamente su uno o più quadri, l'orientazione interna delle singole prospettive, (costituita

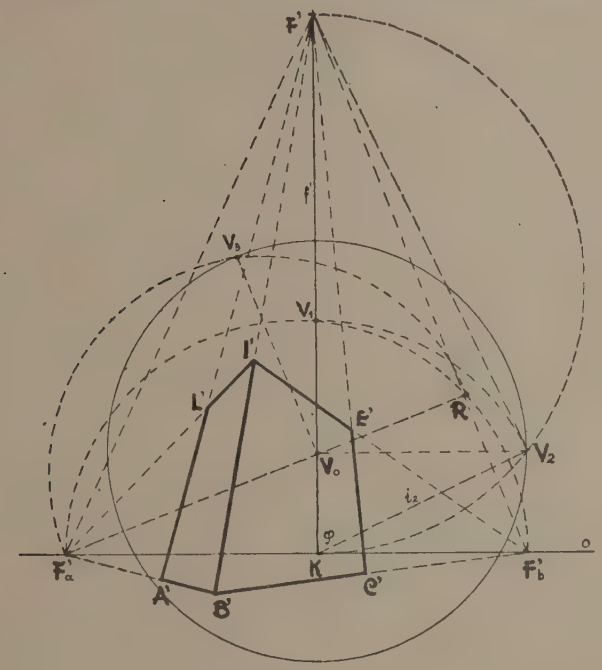


Fig. 2.

dall'insieme dell'orizzonte, del punto principale e della distanza principale), la fondamentale relativa a ciascuna prospettiva e le prospettive di una o più proiezioni dell'oggetto stesso sul geometrale, l'oggetto è determinato.

L'orientazione interna di una prospettiva si ottiene nel seguente modo. L'orizzonte è individuato dalla retta congiungente i punti di fuga di due coppie di rette orizzontali parallele, (le rette di una coppia non parallele a quelle dell'altra). Il punto principale e la distanza principale saranno definiti quando, oltre al punto di fuga F' delle rette perpendicolari al piano fondamentale, siano noti i punti di fuga dei lati di un angolo retto orizzontale. Il punto F' è noto quando si conoscono le prospettive di due rette verticali, essendo esso il punto di incontro delle prospettive stesse.

Sia $A'\,B'\,C'\,E'\,I'\,L'$ (Fig. 2) la prospettiva di un parallelepipedo ret-

tangolo con le basi orizzontali. Prolunghiamo fino al loro punto d'incontro le rette $A'B'$, $L'I'$, (prospettive degli spigoli obiettivi orizzontali e paralleli AB, LI appartenenti alla faccia $A\,B\,L\,I$ del parallelepipedo), e le rette $B'C'$, $I'E'$, (prospettive degli spigoli obiettivi orizzontali e paralleli $B\,C$, $I\,E$, appartenenti alla faccia $B\,C\,E\,I$). La retta congiungente i due punti d'incontro trovati, che indichiamo rispettivamente con F_a' e F_b', punti di fuga delle due coppie di spigoli paralleli considerati, è l'orizzonte. Prolunghiamo sino al loro punto d'incontro le rette $A'L'$, $B'I'$, (prospettive degli spigoli obiettivi verticali $A\,L$, $B\,I$, appartenenti alla faccia $A\,B\,I\,L$); detto punto, che indichiamo con F', è il punto di fuga di tutte le rette perpendicolari al geometrale, ovvero l'antipolo dell'orizzonte rispetto al cerchio di distanza.

Essendo retto l'angolo obiettivo $A\,B\,C$, la cui prospettiva è $A'B'C'$, quando il piano di orizzonte si ribalterà sul quadro nel senso indicato dalla freccia nella Fig. 1, il centro di vista ribaltato V_1 si troverà in posizione tale che le rette congiungenti esso coi punti di fuga F_a' e F_b' formeranno un angolo retto; V_1 apparterrà quindi alla perpendicolare f' condotta dal punto F' all'orizzonte ed alla semicirconferenza di diametro $F_a'F_b'$ descritta superiormente all'orizzonte. Indichiamo (Fig. 2) con K il punto d'incontro della f' con l'orizzonte; si osserva che il segmento $K\,V_1$ è eguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui le lunghezze dei cateti sono rispettivamente eguali, l'una alla distanza principale e l'altra alla distanza del punto principale V_o dall'orizzonte. Si osserva inoltre che, ribaltando sul quadro, nel senso verso la destra dell'osservatore, il piano visuale principale, il triangolo rettangolo $F'\,V\,K$, appartenente ad esso, si ribalterà nel triangolo rettangolo $F'\,V_2\,K$, di cui V_2, vertice dell'angolo retto, è il ribaltamento del centro di vista V. Il punto V_2 si troverà quindi sulla semicirconferenza di diametro $F'\,K$ descritta verso la destra dell'osservatore ad una distanza da K eguale a $K\,V_1$. Costruito a tale scopo un altro arco di circonferenza con centro in K e di raggio $K\,V_1$, nell'intersezione di questo con la predetta semicirconferenza di diametro $F'\,K$ si otterrà il ribaltamento V_2 del centro di vista. Il punto d'incontro V_o della retta f' con la perpendicolare ad essa condotta da V_2 è il punto principale, centro del cerchio di distanza di raggio eguale a $V_2\,V_o$.

Si osserva anche che l'angolo $V_2\,K\,F' \equiv \varphi$ denota l'inclinazione del quadro al piano di orizzonte, e quindi al geometrale.

Il punto principale e la distanza principale si possono ottenere anche nel seguente modo. Il triangolo acutangolo $F_a'F'F_b'$, antireciproco rispetto al cerchio di distanza, rappresenta la sezione col quadro di un triedro trirettangolo, di cui il vertice, esterno al quadro, è il centro di vista V; la proiezione ortogonale di questo sul quadro è l'ortocentro del triangolo stesso, ovvero il punto principale V_o. Consideriamo una delle altezze del triangolo $F_a'F'F_b'$, sia quella relativa al lato $F_b'F'$, il cui punto

di incontro con $F_b' F'$ indichiamo con R; osserviamo che l'angolo obiettivo $F_a' V R$, proiettato in $F_a' V_o R$, è retto in V, quindi, ribaltandolo sul quadro con una rotazione intorno alla retta $F_a' R$, esso si ribalterà in un angolo retto iscritto in una delle due semicirconferenze di diametro $F_a' R$, (secondo il verso in cui si è eseguito il ribaltamento), e V_3, ribaltamento di V, sarà il punto d'incontro con una delle due semicirconferenze

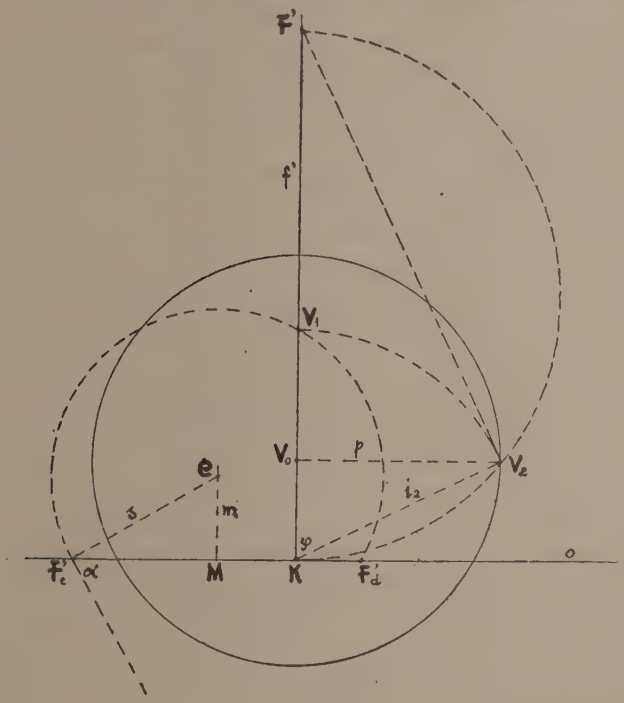


Fig. 3

medesime della perpendicolare condotta da V_o a $F_a' R$. La lunghezza del segmento $V_3 V_o$ è eguale alla distanza principale [1]).

Il punto principale e la distanza principale potranno determinarsi anche quando, oltre al punto di fuga delle rette perpendicolari al geometrale, siano noti i punti di fuga dei lati di un angolo orizzontale di misura nota. Supponiamo già determinati, come precedentemente si è detto, l'orizzonte o e il punto F', e siano F_c' e F_d' (Fig. 3) i punti di fuga dei lati di un an-

[1]) Nel caso in cui uno dei tre punti di fuga, F_a', F', F_b' od anche due di essi siano fuori del quadro, con semplici costruzioni geometriche si potranno ottenere egualmente il punto V_o e la distanza principale, applicando il teorema di Desargues sui triangoli omologici per quanto riguarda la determinazione della retta congiungente un punto proprio col punto di concorso di due rette, quando questo è inaccessibile

golo orizzontale di misura nota α; si costruisca l'arco di circonferenza capace di detto angolo i cui estremi passino per F_c' e F_d'. Condurremo perciò al disotto dell'orizzonte per uno dei due punti di fuga, per esempio per F_r' la retta r inclinata a o dell'angolo α nel senso indicato nella Fig. 3, pel punto medesimo tracceremo al disopra dell'orizzonte la retta s perpendicolare a r sino ad incontrare la perpendicolare m all'orizzonte, condotta dal punto M medio del segmento $F_c' F_d'$; sia C il punto ms. L'angolo $F_c' C M$ è eguale all'angolo α, quindi, descritta la circonferenza con centro in C e di raggio eguale a $C F_c'$, l'arco di questa, compreso fra F_c' e F_d' superiormente all'orizzonte, è l'arco di circonferenza capace dell'angolo α. Ribaltando il piano di orizzonte nel senso indicato dalla freccia nella Fig. 1, il centro di vista si ribalterà nel punto V_1, intersezione di f' con l'arco di circonferenza anzidetto. Descrivendo, in modo analogo all'altro procedimento precedentemente adottato, una semicirconferenza di diametro $F' K$, nell'intersezione di questa con l'arco di circonferenza di centro K e raggio $K V_1$ si otterrà V_2, ribaltamento dello stesso centro di vista V, quando lo si consideri appartenente al piano visuale principale. Condotta infine da V_2 la perpendicolare p a f', il punto $p f' \equiv V_o$ sarà il punto principale, e la lunghezza del segmento $V_2 V_o$ indicherà la distanza principale.

Per ricostruire la fondamentale, onde ottenere la restituzione del geometrale, basta conoscere la lunghezza di un segmento orizzontale appartenente al geometrale, di cui sia nota la prospettiva, o la lunghezza di un segmento verticale, di cui l'estremo inferiore appartenga al geometrale, essendo nota la prospettiva del segmento stesso.

Supponiamo dapprima che sia assegnata la lunghezza di un segmento $A B$ del geometrale, di cui $A' B'$ sia la prospettiva. È noto che fra la prospettiva di una figura appartenente al geometrale ed il ribaltamento della figura stessa, quando il geometrale si ribalta sul quadro, esiste una relazione di omologia, avente per centro il ribaltamento V_1 del centro di vista, ottenuto ribaltando il piano di orizzonte sul quadro, per asse la fondamentale t e per retta limite del piano delle immagini l'orizzonte o (Fig. 4). Quindi la prospettiva r' della retta obiettiva r, cui appartiene il segmento $A B$, ed il ribaltamento r_1 della retta r stessa dovranno incontrarsi sulla fondamentale, d'altra parte il segmento $A_1 B_1$, ribaltamento di $A B$, dovrà essere compreso fra le due proiettanti $V_1 A'$ e $V_1 B'$ ed essere parallelo alla retta congiungente V_1 con F_r', avendo indicato con F_r' il punto di fuga della retta r. Congiungeremo V_1 con F_r' ed a partire da V_1, nel senso $V_1 F_r'$, staccheremo il segmento $V_1 A_o$ di lunghezza eguale a quella nota del segmento $A B$; dal punto A_o tracceremo la parallela a $V_1 B'$ sino ad incontrare la retta $V_1 A'$; sia A_1 il punto d'incontro trovato, per esso condurremo la parallela r_1 a $V_1 A_o$; la retta t parallela a o condotta pel punto T_r, comune a r_1 ed alla retta $F_r' B'$, sarà la fondamentale richiesta.

Come si è già detto, la restituzione del geometrale può ottenersi anche

quando sono note la lunghezza di un segmento verticale, di cui l'estremo inferiore appartenga al geometrale, e la prospettiva del segmento stesso.

Premettiamo alcune considerazioni inerenti all' operazione diretta, cioè alla rappresentazione prospettica di un segmento verticale. Sia $A\,C$ (Fig. 1) il segmento verticale di cui l'estremo A appartiene al geometrale, e sia $A'\,C'$ la prospettiva del segmento stesso; indichiamo con k la lunghezza

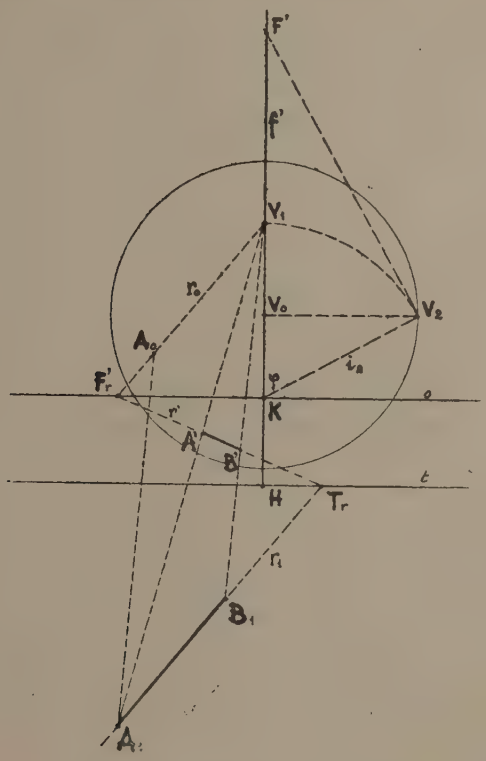


Fig. 4

del segmento $A\,C$, con h la distanza fra il piano di orizzonte π' ed il geometrale, con B l'intersezione di $A\,C$ con π', e con B' la prospettiva di B. Le due punteggiate $A\,B\,C$ e $A'\,B'\,C'$, i cui sostegni indichiamo rispettivamente con n e n', sono prospettive, essendo V il centro di prospettività; al punto F' di n' corrisponde il punto F_∞ di n, quindi il birapporto dei quattro punti A', B', C', F', di n', è eguale al birapporto dei quattro punti A, B, C, F_∞, di n, cioè $(A'\,B'\,C'\,F') = (A\,B\,C\,F_\infty) = \dfrac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,F_\infty)} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} =$

$$= \frac{k}{k-h}\,.$$

Il segno di tale birapporto è negativo nel caso in cui il punto C si trovi al disotto del piano di orizzonte, cioè quando $k < h$.

Da queste considerazioni nascono delle costruzioni molto semplici per determinare le altezze prospettiche di punti rispetto al geometrale, conoscendone le altezze obiettive.

Sia da determinarsi la prospettiva di un punto C, di cui si conoscano la prospettiva A' della sua proiezione ortogonale sul geometrale e la sua altezza obiettiva $k > h$ rispetto al geometrale stesso. Il punto C', prospettiva di C, apparterrà alla prospettiva della perpendicolare n condotta da A al geometrale cioè alla retta n' congiungente A' con F'; indichiamo con B' il punto $n'o$, che è la prospettiva del punto d'incontro B della retta obiettiva n col piano di orizzonte. La lunghezza del segmento obiettivo $A\,B$ è eguale a h. Il punto C' richiesto si determinerà osservando che esso dovrà soddisfare alla relazione: $(A'\,B'\,C'\,F') = \dfrac{k}{k-h}$.

La lunghezza h si ottiene facilmente (Fig. 5), ribaltando il piano visuale principale sul quadro. La retta $V_2\,K \equiv i_2$ rappresenta il ribaltamento della intersezione del piano visuale stesso col piano di orizzonte; conducendo per H, punto comune a l e f', la parallela l_2 a i_2, essa è il ribaltamento della intersezione del piano visuale principale col geometrale, la distanza fra i_2 e l_2 è uguale a h.

Si conducano quindi per A' e F' due rette parallele n_1, s, sulla n_1 s stacchino a partire da A', in un senso o nell'altro, due segmenti $A'\,B_1$ e $A'\,C_1$ di lunghezze rispettivamente eguali a h e k; si tracci la retta congiungente B_1 con B' e la si prolunghi sino ad incontrare s, il punto d'incontro S trovato è il centro di prospettività fra le due punteggiate n_1 e n', essendo A' punto unito. Si conduca la retta $S\,C_1$, il punto d'incontro di questa con n' è il punto C' richiesto. Infatti, indicando con $F_1\infty$ il punto improprio di n_1, si ha: $(A'\,B'\,C'\,F') = (A'\,B_1\,C_1\,F_1\infty) = (A'\,B_1\,C_1) = \dfrac{\overline{A'\,C_1}}{\overline{B_1\,C_1}} = \dfrac{k}{k-h}$.

Per determinare C' possiamo eseguire anche un'altra costruzione. Si conduca per F' una retta n_o ad arbitrio e su questa si stacchino a partire da F' nello stesso senso o in senso contrario, secondo che $k \gtrless h$, due segmenti $F'\,B_o$ e $F'\,A_o$ di lunghezze rispettivamente eguali a k e $k-h$; si traccino le rette $B_o\,B'$ e $A_o\,A'$; il loro punto d'incontro S' è il centro di prospettività fra le due punteggiate n' e n_o, che hanno F' per punto unito. Si conduca da S' la parallela r a n_o, il punto $C' \equiv rn'$ è quello cercato. Infatti, indicando con $C_o\infty$ il punto improprio di n_o, si ha: $(A'\,B'\,C'\,F') = (A_o\,B_o\,C_o\infty\,F') = \dfrac{(A_o\,B_o\,C_o\infty)}{(A_o\,B_o\,F')} = \dfrac{1}{(A_o\,B_o\,F')} = \dfrac{\overline{B_o\,F'}}{\overline{A_o\,F'}} = \dfrac{k}{k-h}$.

Si osserva infine che C' può anche ottenersi ribaltando il piano proiettante la retta $A'\ F'$ con le note costruzioni del metodo della proiezione centrale.

Premesse queste costruzioni inerenti alla determinazione di altezze prospettiche di punti, conoscendo le altezze obiettive, potremo facilmente

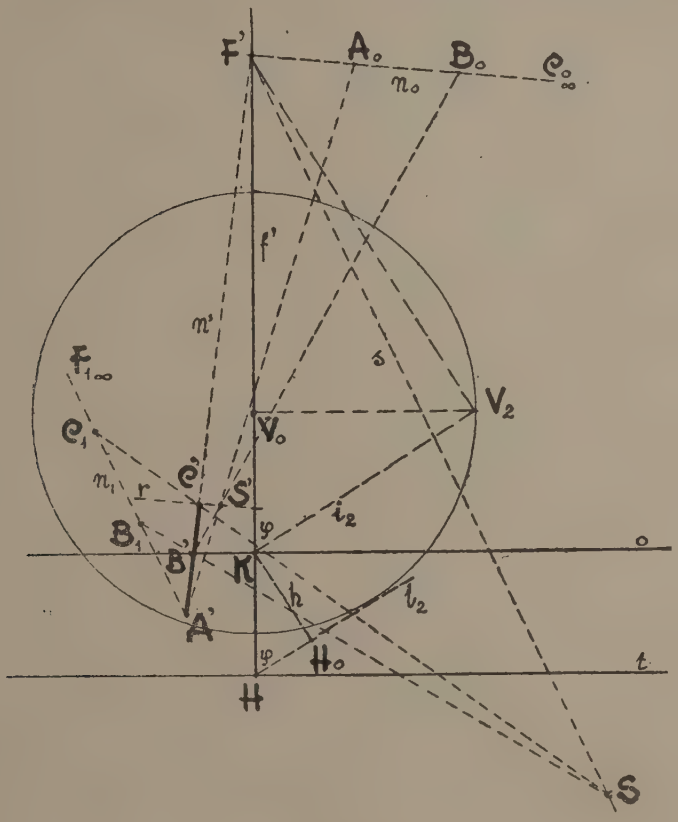


Fig. 5

procedere alla determinazione della fondamentale, se sono note la prospettiva di un segmento di retta verticale, di cui l'estremo inferiore appartenga al geometrale, e la lunghezza effettiva del segmento stesso.

Procederemo inversamente nelle costruzioni innanzi esposte. Riferendoci al primo procedimento, sia k la lunghezza del segmento considerato $A\ C$, altezza obiettiva del punto C, e $A'\ C'$ la prospettiva del segmento stesso, cioè l'altezza prospettica del punto C (Fig. 5). Si conducano per A' e F' due rette n_1, s parallele, sulla n_1 a partire da A', in un senso o nell'altro, si stacchi il segmento $A'\ C_1$ di lunghezza eguale a k; si tracci la retta $C_1\ C'$

e sia S il suo punto d'incontro con s, da S si proietti su n_1 il punto B' e sia B_1 la proiezione ottenuta; la lunghezza del segmento $A_1 B_1$ è eguale a h, cioè alla distanza fra il piano di orizzonte ed il geometrale. Si conduca dal punto $K \equiv f'o$ la perpendicolare a i_2 e si stacchi su questa a partire da K ed inferiormente all'orizzonte il segmento $K H_0$ di lunghezza eguale a h, pel punto H_0 si tracci la parallela a i_2 sino ad incontrare f', traccia del piano visuale principale sul quadro; sia H il punto d'incontro trovato, la parallela all'orizzonte condotta per esso è la fondamentale t cercata.

Determinata così anche la fondamentale, la restituzione della proiezione orizzontale dell'oggetto, (comunemente detta pianta), potremo ottenerla, sia ribaltando il geometrale sul quadro e determinando la figura omologica della prospettiva della pianta stessa nella omologia innanzi accennata, sia operando separatamente, (immaginando staccati il quadro ed il geometrale), con costruzioni grafiche inverse di quelle che si eseguono per la rappresentazione prospettica di una figura del geometrale.

Le regole già esposte per la determinazione di altezze obiettive di punti rispetto al geometrale, conoscendone le altezze prospettiche, ci permetteranno infine di costruire anche la proiezione verticale dell'oggetto rappresentato in prospettiva. Si hanno così tutti gli elementi sufficienti per determinare sia la vera forma e grandezza dell'oggetto che le dimensioni delle singole parti dell'oggetto stesso.

Un problema di foronomia alla luce della teoria del potenziale

Nota del dott. ing. **Michele Viparelli**, *presentata dal socio* **G. Ippolito**

(Adunanza del dì 5 giugno 1948)

Sunto. — Si trasforma opportunamente un corollario del teorema di Green sulla funzione potenziale e col suo ausilio si pone in evidenza l'influenza delle condizioni d'installazione sui fenomeni di efflusso in Foronomia.

1. Nei fenomeni di Foronomia l'esperienza ha dimostrato che vale molto prossimamente il principio della conservazione dell'energia e si ha un processo di moto quasi dovunque irrotazionale, di talchè, eccetto in piccole zone della massa fluida, si può ritenere che le velocità siano quelle, che discenderebbero dalla teoria della funzione potenziale, se avendo assegnate le condizioni al contorno in base ai dati desunti dall'installazione della

luce sottoposta a studio fossimo in grado di dare soluzione all'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\Delta_2 \varphi = 0, \qquad (1)$$

dove φ è la funzione potenziale della velocità ed il simbolo Δ_2 rappresenta il ben noto operatore di Laplace, ciò s'intende nell'ipotesi di moto permanente, che manterremo sempre in seguito.

Il problema diventa, anche concettualmente, più complesso, quando siano presenti peli liberi, che assumono particolari conformazioni in dipendenza delle caratteristiche geometriche delle pareti solide, entro cui avviene il moto, e delle forze in gioco.

All'equazione (1), che interessa tanti rami della fisica, in moltissimi casi non è stata data soluzione nonostante lo sforzo di insigni matematici; le soluzioni note riguardano casi particolari, implicanti per lo più contorni di facile definizione geometrica. Per le ordinarie condizioni di installazione delle luci a battente o a stramazzo non esistono soluzioni matematiche del problema, eccetto in caso di moti piani.

Ritengo pertanto che la difficoltà del problema giustifichi tentativi di ricavare dalla teoria della funzione potenziale anche solo proprietà e interpretazioni di fenomeni, già noti dall'esperienza.

2 Si esporranno nel corso di questa nota alcune deduzioni fatte partendo dal corollario del Green, cui si darà forma più consentanea ad interpretazioni idrauliche dell'espressione già nota:

$$\int_\sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_\tau \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau, \qquad (2)$$

dove φ è una funzione armonica definita nel volume τ di contorno σ, in ogni elemento $d\sigma$ del quale n è la normale orientata verso l'esterno, e le x, y e z sono le coordinate del punto generico di $d\tau$ rispetto a tre assi cartesiani.

Poichè per la definizione stessa di φ è

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_x \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_y \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = V_z \qquad (3)$$

e

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = V^2,$$

dove V_x, V_y e V_z sono le componenti della velocità secondo i tre assi e V il suo modulo, risulta che l'integrale a secondo membro della (3), a meno

del fattore densità del fluido, non è altro che il doppio della energia cinetica posseduta dalla massa contenuta nel volume τ. Tale interpretazione è del resto nota da lungo tempo e di essa si sono avvalsi eminenti studiosi per esaminare in taluni casi condizioni di stabilità del moto dei fluidi reali. È anche noto che il valore dell'integrale è minimo rispetto a quello che si ha sostituendo i valori delle velocità di ogni altro moto, non irrotazionale, che soddisfi alle stesse condizioni al contorno.

Quello, che non mi consta che sia stato messo in evidenza, è la particolare forma che assume la (3), se si stabilisce opportunamente il volume τ o, che è lo stesso, il suo contorno σ.

In effetti in Idraulica può riuscire spesso agevole determinare con sufficiente sicurezza un tronco di corrente delimitato da due superfici equipotenziali di velocità e per il restante da contorni attraverso cui non si verifica moto di fluido. In tal caso potremo scindere la superficie σ in tre parti; l'una σ_1, corrispondente ad una delle superficie equipotenziali, definita dal valore costante φ_1, la seconda σ_2 corrispondente alla superficie equipotenziale φ_2 e l'ultima σ_3 comprendente le superficie attraverso cui non c'è flusso di liquido, e per cui è $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n = 0$, dove V_n rappresenta la componente della velocità nella direzione n, che in base al verso assegnato alla n è positiva, se rivolta verso l'esterno.

In queste ipotesi ed ammettendo, senza ledere la generalità, che le velocità siano dirette verso l'interno di τ in σ_1 e verso l'esterno in σ_2, si ha evidentemente:

$$\int_{\sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_{\sigma_1} \varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma_2} \varphi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma_3} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

e, poichè è:

$$\int_{\sigma_1} \varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \varphi_1 \int_{\sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -Q\varphi_1$$

$$\int_{\sigma_2} \varphi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = Q\varphi_2,$$

Q essendo la portata della corrente, e

$$\int_{\sigma_3} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0,$$

essendo per la scelta fatta $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ in ogni punto di σ_3, si ha in definitiva

$$Q(\varphi_2 - \varphi_1) = \int_{\tau} V^2 d\tau. \qquad (4)$$

La (4) presenta rispetto alla (3) il vantaggio di porre in evidenza la portata, una grandezza di tangibile significato, e può essere, almeno concettualmente, indicata come un metodo di risoluzione della (1), quando siano note le condizioni al contorno e cioè nel caso le velocità sulle superfici σ_1 e σ_2. In effetti si pensi di suddividere il volume τ in tanti volumi minori τ' mediante un corrispondente numero di superficie equipotenziali, sicchè per ogni τ' valga ancora la (4). Ad esempio, se σ' è una sezione trasversale della corrente coincidente con una superficie equipotenziale di costante φ', poco diversa da φ_1, poichè per la definizione stessa di φ è $\int_{\delta s} V ds = \varphi' - \varphi_1$, dove δs è la distanza lungo una linea di flusso di due punti corrispondenti di σ_1 e σ', si potrà in prima approssimazione tracciare σ' staccando in ogni punto di σ_1 nella direzione della velocità un segmento inversamente proporzionale al valore di V nel punto e si fisserà la V' in σ' con la condizione.

$$V d\sigma_1 = V' d\sigma'. \qquad (a)$$

In base ai valori delle V e V' calcoleremo l' $\int_{\tau'} V^2 d\tau$, τ' essendo il volume compreso tra σ_1 e σ'.

Se risulta verificata la (4), si staccherà un'altra sezione σ'' con altro valore φ'' di φ: se non è verificata la (4), si modificherà la σ' e si ripeteranno le operazioni, finchè sarà soddisfatta la condizione imposta. Si continuerà così fino a raggiungere la σ_2 dove si controllerà che essa coincida con una superficie equipotenziale e che la distribuzione delle velocità desunta dal calcolo sia proprio quella fissata in partenza. Se ciò non fosse, si ripeteranno le operazioni modificandole opportunamente. A parte le notevoli difficoltà che rendono il metodo quasi inattuabile in pratica, poichè una volta soddisfatta la (4) e la (*a*) per l'intero τ, restano soddisfatte sia la (1) sia la condizione che al contorno la $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ acquista i valori stabiliti, il problema proposto è risolto.

Val la pena di notare che in tutta la trattazione precedente si è fatto riferimento ad uno schema puramente cinematico e quindi sarebbe artificioso voler cercare un'interpretazione meccanica delle formule che vi compaiono.

Esistono benvero tentativi di interpretare il potenziale di velocità dal lato meccanico, ma essi sono basati sull'introduzione di φ nell'equazione di Bernoulli e non sulle sole relazioni, che discendono dalla teoria del potenziale e in definitiva dal principio di continuità.

Potrebbe sembrare, da quanto si è detto, che la scelta dei valori di $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ su σ_1 e σ_2 sia completamente arbitraria; è evidente invece che per un liquido incomprimibile dovranno valere le relazioni

$$-\int_{\sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_{\sigma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = Q.$$

Se inoltre si suppone di considerare le sezioni σ_1 o σ_2 quali facenti parte di un tronco di corrente cilindrico ed in ogni caso di una zona, dove i filetti sono prossimamente rettilinei e paralleli, per la ortogonalità delle superfici equipotenziali ai filetti stessi, le $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (o le velocità) debbono essere assunte prossimamente eguali in tutti i punti di una sezione trasversale. Nelle applicazioni delle relazioni precedenti non vi è posto per un moto uniforme, quale si è soliti considerare in Idraulica, con velocità diverse da punto a punto di una stessa sezione.

È da osservare che una volta raggiunto un tronco di corrente cilindrico, la relazione (4) sussisterà indipendentemente dalle lunghezze, che se ne prendono in considerazione, e quindi l'inclusione di tratti più o meno lunghi di esso non modifica i risultati cui si perviene dalla (4).

3. Dalla relazione (4) si trae spunto per alcune considerazioni sui processi di efflusso da una bocca a battente od a stramazzo.

In ogni tipo di luce a monte del punto, dove ha inizio la chiamata di sbocco, esiste certamente una sezione σ_1, in cui i filetti sono prossimamente rettilinei e paralleli; ad una certa distanza a valle della luce stessa esiste pure altra sezione σ_2, in cui i filetti hanno curvatura nulla o praticamente trascurabile e formano un angolo costante con la verticale (a partire dalla sezione contratta per una luce a battente, da una sezione dove la vena ha piccola inclinazione rispetto alla verticale in uno stramazzo). Nello schema teorico di moto a potenziale di velocità, che potrà essere sostituito al reale, si assumeranno le sezioni σ_1 e σ_2 quali superfici equipotenziali e si stabiliranno le velocità nelle due sezioni in modo da tener conto delle condizioni poste alla fine del precedente paragrafo.

Il tronco di corrente τ compreso tra σ_1 e σ_2 soddisfa alle condizioni in base alle quali si è dedotta la (4): la corrente penetra od esce da τ solo attraverso σ_1 e σ_2, che rappresentano due superficie equipotenziali.

Se $\delta\varphi$ indica la differenza di potenziale $(\varphi_2 - \varphi_1)$ tra σ_1 e σ_2, la portata assume il valore:

$$Q = \frac{1}{\delta\varphi} \int_{\tau} V^2 \, d\tau \qquad (4')$$

dove anche $\delta\varphi$, pur costante per tutti i filetti nel tratto compreso tra σ_1 e σ_2, dipende da τ e dai valori di V nelle sezioni estreme.

Se si scinde l'integrale a secondo membro nella somma

$$\int_{\tau} V^2 \, d\tau = \int_{\tau'} V^2 \, d\tau + \int_{\tau''} V^2 \, d\tau$$

in cui τ' indica il volume di tutta la vena a valle della luce e di quella zona a monte nella quale le pressioni si scostano apprezzabilmente dalla

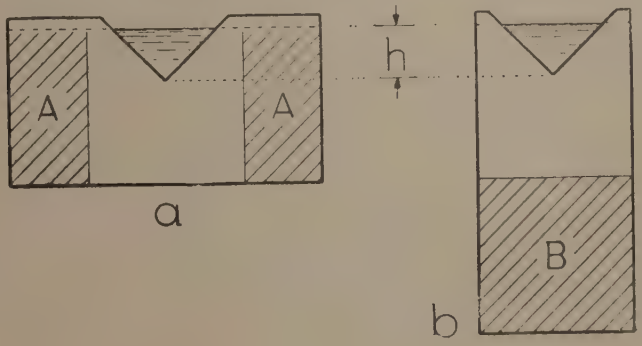
distribuzione idrostatica, τ'' la restante parte di τ, la (4') diventa:

$$Q = \frac{1}{\delta\varphi}\left(\int_{\tau'} V^2\, d\tau + \int_{\tau''} V^2\, d\tau\right). \qquad (5)$$

A stretto rigore alla operazione simbolica innanzi compiuta di scindere l' $\int_{\tau} V^2\, d\tau$ in due parti non è lecito far corrispondere un analogo comportamento fisico del fenomeno.

Pur tuttavia sembra intuitivo a chi scrive che, se per una data luce si alterano le modalità d'installazione, sempre s'intende che ciò non ne comporti una sostanziale modifica nel tipo, come quando se ne sopprima la contrazione su uno o più lati, i fenomeni, che accompagnano l'efflusso nelle immediate adiacenze della luce, cioè in τ', variano pochissimo e l' $\int_{\tau'} V^2\, d\tau$ è praticamente costante.

Eppure tentativi teorici di risolvere l'equazione (1), nei quali ci si è limitato a considerare le immediate adiacenze della luce o a fare ipotesi non rispecchianti il vero per quel che riguarda τ'', hanno fornito risultati se non completamente errati, insoddisfacenti, evidentemente perchè nei procedimenti non sono state rispettate tutte le condizioni ai limiti.



Occorrerebbe quindi estendere il procedimento tenendo conto delle condizioni al contorno di τ'', le quali per l'unicità di integrazione della (1) hanno la loro influenza su entrambi i termini in cui abbiamo scisso il secondo membro della (4'), ma appaiono esplicitamente e preponderantemente nell' $\int_{\tau''} V^2\, d\tau$.

Si può inoltre escludere che questo integrale stia a rappresentare solo l'apporto di energia cinetica della corrente in arrivo.

In effetti se si suppone di avere uno stesso tipo di stramazzo (in figura triangolare), installato in vario modo, ad esempio al termine di due canali entrambi di forma rettangolare, ma di diversa base, come è indicato nei casi *a* e *b* della figura, e che le due luci così ottenute funzionino con uno stesso carico h tale che σ_1 sia eguale in ambo i casi, si può dimostrare [1]) che la velocità di alimentazione e quindi la portata non può essere eguale nei due casi. Se invece l' $\int_{\tau''} V^2 d\tau$ stesse a tener conto dell' energia cinetica posseduta dalla corrente uniforme con velocità V_0 in σ_1, essendo eguali h, V_0^2 e luce, non vi sarebbe motivo di incompatibilità delle ipotesi fatte.

Da quanto si è detto si deduce che la portata per un dato tipo di luce, ove si eccettuino casi molto particolari, dipende dalla somma dei due addendi l' uno dipendente principalmente dal carico $\int_{\tau'} V^2 d\tau$, l' altro dal modo di installazione della luce $\int_{\tau''} V^2 d\tau$.

Trova così spiegazione il risultato [2]) ritrovato per via sperimentale sugli stramazzi Thomson e circolare, che il coefficiente di efflusso μ in funzione di h può essere dato da una curva, il cui andamento dipende dalla forma della luce e la cui posizione nel piano μ, h dipende dalla posizione della luce rispetto alla sezione trasversale del canale d' alimentazione.

È motivo di riflessione il fatto che il coefficiente notevolmente elevato

---

[1]) Se si ammettesse che per ambo i casi la velocità di arrivo e quindi la portata sia la stessa, prendendo le sezioni σ_1 e σ_2 sopra definite ad egual distanza dalle luci, ripetendosi identicamente il fenomeno a meno di τ'' nei due casi, non dovrebbero variare τ', $\delta\varphi$ e $\int_{\tau'} V^2 d\tau$; ne risulterebbe che anche l' $\int_{\tau''} V^2 d\tau$ dovrebbe assumere nelle due condizioni un unico valore.

Ma non è possibile che se $\delta\varphi$ è lo stesso per configurazioni diverse, sia anche costante $\int_{\tau'} V^2 d\tau$.

In effetti poichè è $\delta\varphi = \int_l V ds$, dove l è la lunghezza del filetto da σ_1 a σ_2 lungo il quale si misura la s, risultando l maggiore per i filetti facenti capo alla zona B (fig. 1b) che per quelli partenti dalla zona A (fig. 1a) ed essendo eguali le velocità agli estremi dei filetti, si avranno minori valori delle V ed in conseguenza di $\int_{\tau''} V^2 d\tau$ nel caso *b*) che in quello *a*).

[2]) Viparelli M., « *Sullo stramazzo Thomson* ». Atti della Fondazione Politecnica del Mezzogiorno d' Italia, vol. III, Napoli.

per cui viene moltiplicato il termine $\frac{V_0^2}{2g}$ (essendo V_0 la velocità di alimentazione), che compare in alcune delle formule sperimentali relative allo stramazzo Bazin, possa trovare spiegazione proprio nell'osservazione che il termine $\int_{\tau''} V^2 d\tau$ non sta a rappresentare il solo apporto di energia cinetica.

Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche dell' Università di Napoli

I nervi motori e sensori degli organi di volo degli Acrididi

Nota del prof. **Marcello La Greca,** *presentata dal socio corr.* **M. Salfi**

(Adunanza del dì 5 giugno 1948)

Sunto. — L' A. ha descritto i nervi sensori e motori degli organi di volo degli Acrididi e in particolare di *Anacridium aegyptium*. Tali nervi sono tutti ramificazioni del *n. anterior*, *n. lateralis secundus* e *n. lateralis dorsalis*.

Le nostre conoscenze sul sistema nervoso degli insetti sono attualmente estremamente insufficienti, specialmente per quanto riguarda i nervi dei segmenti toracici e addominali; i vari autori che hanno trattato tale argomento si sono in genere limitati allo studio della sola catena ganglionare ventrale, tralasciando ogni indagine approfondita sui nervi che da essa partono per tutto il corpo. Fanno eccezione pochissimi lavori, fra i quali meritano particolare menzione uno di Holste (1910) su *Dytiscus marginalis*, uno di Maki (1936) su *Chauliodes formosanus* ed uno di Marquardt (1940) su *Carausius morosus*. Risulta quindi per il momento, data l'impossibilità di effettuare vasti confronti, molto difficile fare rientrare in un quadro generale, i risultati ottenuti da una ricerca condotta su una determinata specie. In questa nota mi propongo di descrivere soltanto quei nervi che in un Ortottero Acridide, *Anacridium aegyptium*, sono in rapporto con i muscoli che presiedono ai movimenti degli organi di volo e quelle che innervano gli organi di senso delle ali stesse. Da un esame sommario condotto pure su altre due specie: *Acrida turrita* e *Locusta migratoria*, ho potuto rilevare come non esistano notevoli divergenze fra le ramificazioni nervose dei gangli pterotoracici di tutte e tre le specie. Tutti i nervi che interessano la presente ricerca, sono ramificazioni di tre diversi tronchi nervosi, partenti, per ogni paio di ali, rispettivamente dal 2° e 3° ganglio toracico. Nel corso della trattazione dovrò quindi accennare, per maggior chiarezza, anche a tutti quegli altri rami nervosi che, pur innervando muscoli i quali non presiedono a movimenti delle ali, appartengono tuttavia a questi stessi tronchi. Ri-

guardo alla nomenclatura, per i tronchi nervosi principali, ho seguito, fin dove possibile, i nomi usati da MARQUARDT, ma ho ritenuto opportuno indicare con un nome, dal quale apparisse chiaramente il muscolo innervato, anche i rami secondari, i quali sono stati indicati da HOLSTE solo con lettere dell' alfabeto.

2° e 3° Ganglio toracico (fig. 1)

Questi due gangli, separati l' uno dall' altro dalla sola ampiezza della spina mesotoracica, sono di cospicue dimensioni, il 3° maggiore del 2°, per la sua fusione con i primi gangli addominali. Dagli angoli anteriori di ciascun ganglio, e alquanto spostato dorsalmente nel mesotorace, parte un lungo nervo per lato, il *nervus anterior* (*na*), mentre dal tratto posteriore, presso

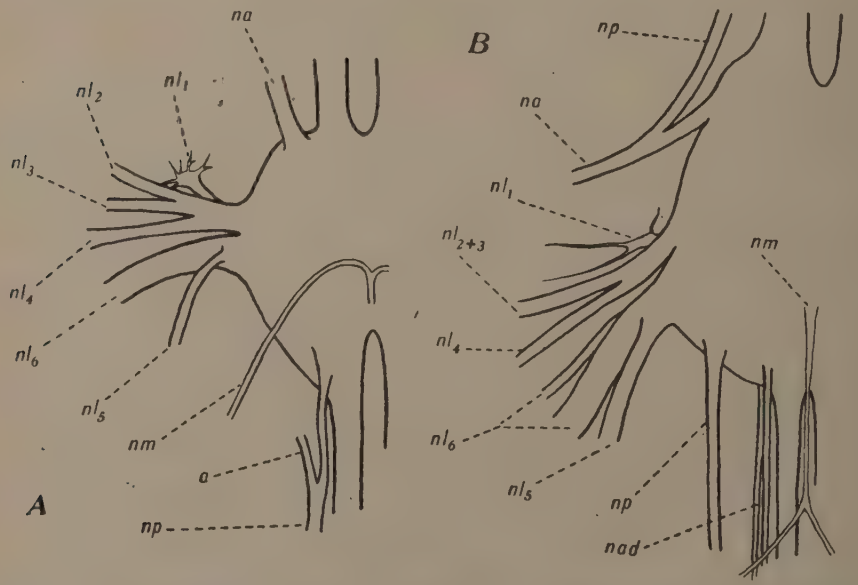


Fig. 1. —*A*, 2° ganglio toracico; *B*, 3° ganglio toracico; *a*, ramo che innerva i mm. prospino-mesofurcale e prospino-mesospinale.

l' origine di ciascun connettivo, e sempre dal lato dorsale, si staccano i *nervi posteriores* (*np*) che si dirigono in senso caudale. Fra queste due paia di nervi, per ogni lato, dal tratto centrale del margine laterale di ciascun ganglio, si distacca una coppia di robusti tronchi nervosi, il *nervus lateralis anterior* e il *nervus lateralis posterior* molto ravvicinati tra loro. Il primo si divide subito in quattro rami: *n. lateralis primus* o *sternalis* (nl_1), posto ventralmente, il *n. lateralis secundus* (nl_2). il *n. lateralis tertius* (nl_3) ed il *n. lateralis quartus* (nl_4); il secondo si divide anch' esso in due rami,

il *n. lateralis quintus* o *dorsalis* (nl_5) ed il *n. lateralis sextus* (nl_6). Di tutti questi tronchi danno nervi che interessano gli organi di volo solo il *n. anterior*, il *n. lateralis secundus* ed il *n. lateralis dorsalis*. Il *n. lateralis primus* si sfiocca nel corpo grasso e sull'ipoderma sternale, il *n. lateralis tertius* ed il *quartus* innervano i muscoli estrinseci delle zampe; il *n. lateralis sextus* penetra nelle zampe per innervare i muscoli intrinseci di queste ed il *n. posterior* riunendosi con *n. anterior* del segmento seguente, costituisce un ponte nervoso tra due gangli successivi (= *n. commissuralis* di Holste). Da ogni ganglio parte inoltre un *n. medianus* (*nm*) impari che biforcandosi va agli stigmi.

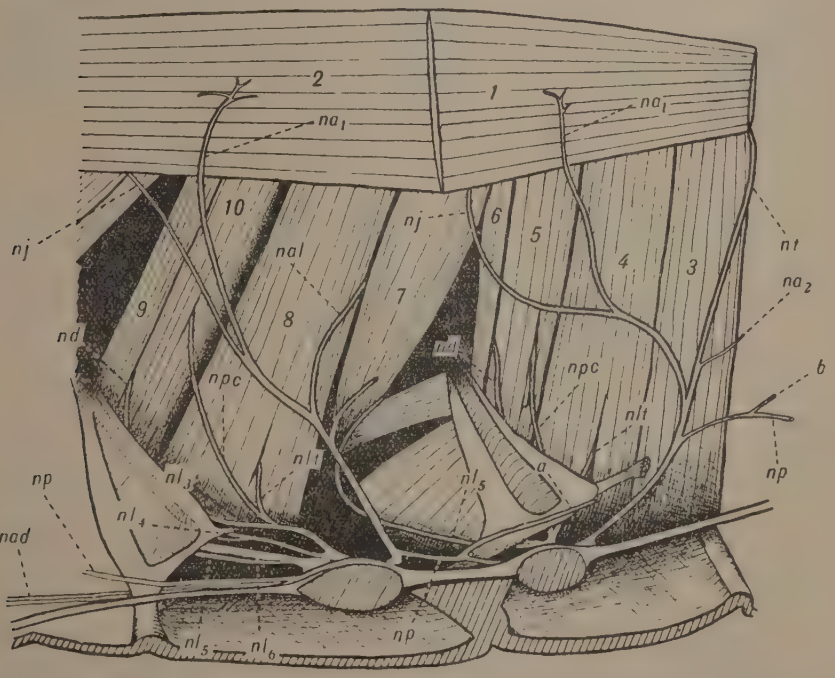


Fig. 2. — Pterotorace di *Anacridium aegyptium*; *a*, ramo che innerva i mm. prospino-mesofurcale e prospino-mesospinale; *b*, ramo che innerva i mm. coxo-prospinale e proforco-mesoforcale; *nd*, nervo del m. trocantero-tergale; *1*, *2*, mm. longitudinali dorsali del meso- e del metatorace; *3*, *4*, mm. 1° e 2° tergo-sternali del mesotorace; *5*, m. protrattore tergale dell'anca mesotoracico; *6*, m. trocantero-tergale mesotoracico; *7*, m. 1° retrattore tergale dell'anca mesotoracica; *8*, m. tergo-sternale metatoracico; *9*, m. trocantero-tergale metatoracico; *10*, m. protrattore tergale dell'anca metatoracica.

I fasci di nervi che partono dal 2° e 3° tronco nervoso passano tutti ra l'apodema furcale e la base dei muscoli tergo-sternali, mentre il *n. po-*

sterior decorre lungo il lato mediale della furca. Dal 3° ganglio toracico parte inoltre un fascio di quattro nervi posteriori, due per lato (*nad*), che, sorgendo vicinissimi ai connettivi, si dirigono posteriormente e sono di pertinenza dei gangli addominali fusi col 3° ganglio toracico.

Le ramificazioni nervose di questi due gangli toracici sono quindi analoghe a quanto ha riscontrato il Marquardt in *Carausius morosus*. Anche le quattro paia di tronchi nervosi che partono dai gangli pterotoracici di *Chauliodes formosanus*, descritti da Maki, sono perfettamente omologabili ai nervi degli stessi gangli di *Anacridium*: infatti il *first root* e il *fourth root of the nerves* corrispondono entrambi all'unico *n. anterior* degli Ortotteri, e precisamente il primo ai rami motori di questo (na_1, na_2) e il secondo ai rami sensori che lo raggiungono provenendo dagli organi di volo (*nt, nal*); il *second root of the nerves* è omologo al *n. lateralis anterior* e il *third root of the nerves* trova il suo corrispondente nel *n. lateralis*

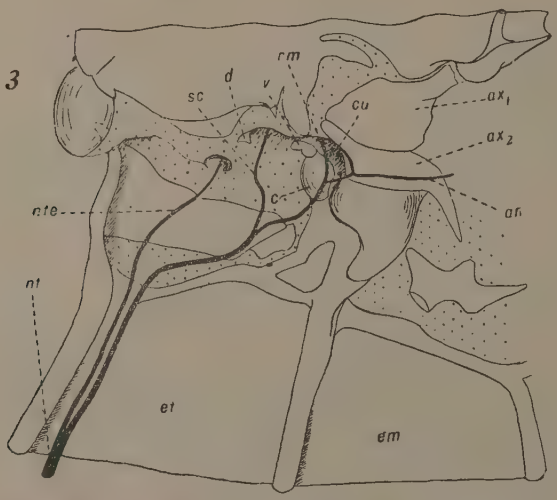


Fig. 3. — Regione ascellare mesotoracica di *A. aegyptium* vista internamente; ax_1, ax_2, 1° e 2° ascellare; *c*, legamento fra il labbro ventrale (*v*) della nervatura subcostale e processo alifero pleurale; *d*, labbro dorsale della testa articolare della nervatura subcostale; *em*, epimero; *et*, episterno.

posterior; anche in *Chauliodes formosanus* questo ultimo nervo si divide in due rami: un tronco principale della zampa, omologabile al *n. lateralis sextus* e un tronco che fornisce rami ai muscoli coxo-subalari, pleuro-ascellari e retrattori dell'anca, perfettamente omologabile al *n. lateralis quintus*.

È da tenere presente che il numero delle ramificazioni dei tronchi laterali, anteriore e posteriore, possono presentare delle differenze in specie diverse; questa diversità è però soltanto apparente perchè i vari rami, in

una specie o in un'altra, possono separarsi dal tronco nervoso principale tutti al medesimo punto oppure più o meno distalmente e dare quindi la impressione di un nervo più o meno ramificato. Infatti nel metatorace dello stesso *Anacridium aegyptium* i nervi laterali secondo e terzo si separano soltanto dopo un tratto comune (fig. 2) già ad una sensibile distanza dal punto in cui si sono staccati i nervi laterali primo e quinto: in tal modo il *n. lateralis anterior* metatoracico sembra fornito di soli tre rami principali.

Recentemente hanno descritto la catena gangliare ventrale di alcuni Acrididi, Jannone (1940) in *Dociostaurus maroccanus* e Hodge (1943) in *Leptysma marginicollis* e *Opsomala vitreipennis*; entrambi questi autori descrivono e rappresentano nelle figure solo tre paia di tronchi nervosi per ciascun ganglio (dal 2° ganglio toracico di *Opsomala* solo due paia): nessuno dei due autori menziona o rappresenta il *n. posterior*, che sarà probabilmente sfuggito alla ricerca data la sua delicatezza.

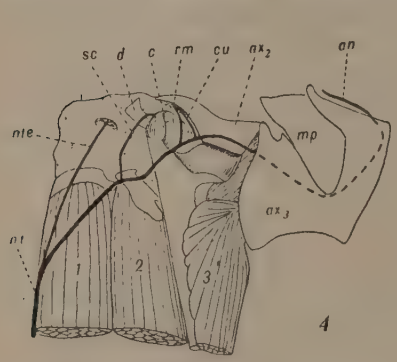
Nervus anterior (figg. 2, 3, 4, 5).

Si origina in ogni lato, dall'angolo anteriore di ciascun ganglio, e si dirige in alto, obliquamente in avanti nel mesotorace e obliquamente indietro nel metatorace, passando fra i rispettivi muscoli tergo sternali e i muscoli longitudinali ventrali intersegmentali meso- e metatoracici (m. furco-furcali). All'altezza di questi muscoli, ciascun nervo è raggiunto dal *n. posterior* del ganglio precedente; il *n. posterior* protoracico (*b*), nel suo decorso innerva con un breve ramo i muscoli coxo-spinale protoracico e profurco-mesofurcale, quello mesotoracico (*a*) i muscoli prospino-mesospinale e prospino-mesofurcale. Nel metatorace la confluenza fra il *n. posterior* mesotoracico ed il *n. anterior* metatoracico avviene poco dopo che quest'ultimo si è staccato dal ganglio del metatorace.

Successivamente il *n. anterior* dà origine a due rami: un *n. musculi longitudinalis dorsalis* (na_4) che innerva i muscoli longitudinali dorsali depressori delle tegmine; questo ramo, nel suo decorso, viene raggiunto da un lungo nervo sensorio, il *n. jugalis tegminis* (*nj*), proveniente dalla membrana jugale delle tegmine, il quale raggiunge il na_4 passando posteriormente all'origine dei mm. retrattori tergali dell'anca e uscendo da sotto al m. longitudinale dorsale; un *n. musculi intersegmentalis sterno-pleuralis* (na_1) che innerva il muscolo dal quale prende il nome. Inoltre il *n. anterior* viene raggiunto da un grosso nervo sensorio, *n. tegminis* (*nt*), proveniente dalle tegmine (nel mesotorace) o *n. alae* (*nal*) proveniente dalle ali (nel metatorace). Questo nervo è formato dalla confluenza di due rami: uno anteriore, il *n. tegulae* (*nte*), e uno posteriore che è a sua volta costituito da 4 nervi: *n. subcostalis* (*sc*), *n. radio-medianus* (*rm*), *n. cubitalis* (*cu*), e *n. analis* (*an*). Il *n. subcostalis* esce dalla nervatura subcostale passando tra il labbro dorsale e quello ventrale della base di quest'ultima. Il *n. radio-medianus* penetra nel torace passando anteriormente al 2° ascellare e sopra

al legamento: la stessa via segue il *n. cubitalis* che nell' ultimo tratto decorre molto vicino al precedente. Il *n. analis* vi riversa passa ventralmente al 3° ascellare e incontra il nervo precedente scorrendo lungo la superficie mediale del 2° ascellare.

I nervi sensori descritti, provenienti dalle tegmine e dalle ali, esistono pure nelle ninfe di *Anacridium aegyptium* e *Locusta danica* (fig. 4) e escono dall' astuccio alare dando origine rispettivamente al *n. tegminis* ed al *n. alae*. Anche *Carausius morosus*, pur essendo attero, presenta, secondo



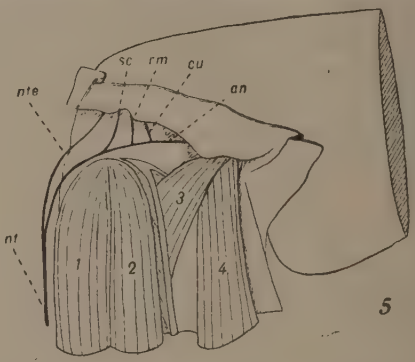


Fig. 4. — Regione ascellare metatoracica di *A. aegyptium* vista internamente; ax_3, 3° ascellare; *mp*, lamina mediana prossimale; *1*, *2*, 1° e 2° muscolo basalare, *3*, m. flessore dell' ala. Altre lettere come in fig. 3.

Fig. 5. — Regione ascellare dell' ultima ninfa di *Locusta migratoria* vista internamente; *4*, m. subalare.

Marquardt, questi rami sensori. I nervi sensori delle tegmine delle ali sono stati descritti da Zacwilichowski (1934) in *Staurodertus biguttulus*, ma questo autore non fa cenno nè di un *n. cubitalis* distinto nè del *n. tegulae*. Anche in *Dytiscus*, secondo Holste (1910), il *n. anterior*, che egli chiama *n. elytri* nel mesotorace e *n. alae* nel metatorace, oltre a dare un ramo ai muscoli longitudinali dorsali riceve vari nervi provenienti dalle nervature degli organi di volo.

N. lateralis secundus (figg. 2, 6, 7).

Questo nervo, come ho già detto, è l' unico ramo del *n. lateralis anterior* che innerva muscoli che presiedono al movimento degli organi di volo. Nel mesotorace, esso, dopo un breve decorso verso l' alto e in fuori, dà un ramo che innerva il muscolo protrattore tergale dell' anca, *n. musculi protractoris tergalis coxae* (*npc*); si insinua quindi dopo breve tratto, tra le fibre del muscolo secondo tergo-sternale per uscire a decorrere tra questo e il muscolo primo tergo-sternale, come *n. musculi levatoris tegminis nlt*); nel suo decorso questo ramo innerva entrambi i due muscoli e termina

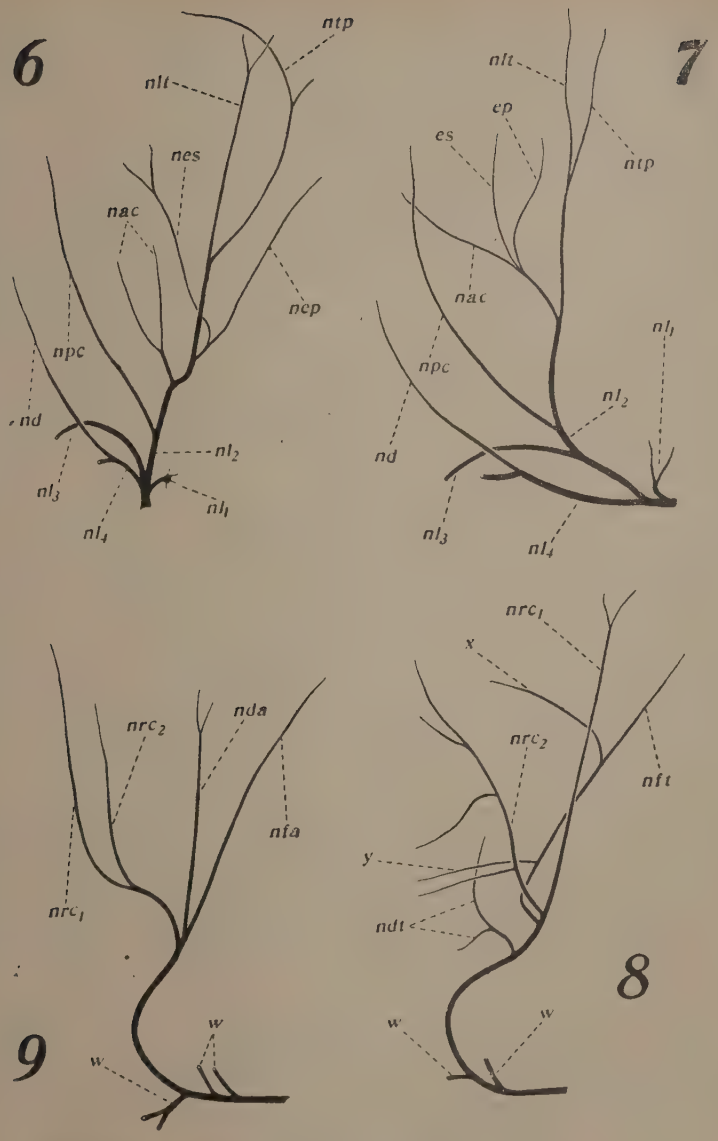


Fig. 6. — *Nervus lateralis anterior* del 2° ganglio di *Anacridium aegyptium*. — Fig. 7. — Lo stesso del 3° ganglio toracico. — Fig. 8. — *Nervus lateralis quintus* del 2° ganglio toracico di *A. aegyptium*. — Fig. 9. — Lo stesso del 3° ganglio toracico. *nd*, nervo del m. trocantero-tergale; *w*, rami che innervano i mm. sternali dell'anca; *x*, ramo del *n. musculi flexoris tegminis* che innerva il m. depressore-estensore della tegmina; *y*, ramo del *n. musculi flexoris tegminis* che innerva il m. 2° retrattore tergale dell'anca.

molto in alto presso il noto. Da questo nervo hanno origine altri tre rami: uno si diparte dal nervo subito dopo che esso è penetrato nel muscolo secondo tergo-sternale e, dirigendosi indietro e in alto fra i muscoli primo e secondo pronatore-estensore della tegmina, si bipartisce per innervare i muscoli primo e secondo abduttori dell'anca (*n. musculi abductoris coxae, nac*); il secondo ramo si stacca dal nervo un poco più in alto del precedente e subito si divide in due rami, di cui, il primo termina al muscolo primo pronatore-estensore (*n. musculi primi extensoris tegminis, nep*); il secondo innerva il muscolo pronatore-estensore secondo (*n. musculi secundi extensoris tegminis, nes*); il terzo sorge ancora un po' più in alto e, decorrendo fra il muscolo primo pronatore-estensore e il muscolo primo tergo-sternale si dirige verso l'alto fino a raggiungere il piccolo muscolo tergo-pleurale che quindi innerva (*n. musculi tergo-pleuralis, ntp*).

Nel metatorace il *n. lateralis secundus* si dirige posteriormente, data la posizione avanzata del terzo ganglio toracico, fino all'altezza del muscolo tergo-sternale; qui, come nel mesotorace si divide in due rami, il posteriore innerva il muscolo protrattore tergale dell'anca (*n. musculi protractoris tergalis coxae, npc*) e l'anteriore, insinuandosi fra le fibre del muscolo tergo-sternale che innerva (*n. musculi levatoris alae, nla*), si spinge fin sotto il noto, dando origine a due rami: il più prossimale di questi si dirige posteriormente e in fuori dividendosi a sua volta in tre rami: due sono i *n. musculi primi* (*ep*) e *secundi extensoris alae* (*es*) e il terzo, aggirando posteriormente il muscolo basalare innerva il muscolo abduttore dell'anca (*n. muscuti abductoris coxae, nti*); il ramo più distale decorre lungo tutta la superficie mediale del muscolo basalare, dirigendosi verso l'alto e terminando sotto al noto: questo ramo è l'equivalente del *n. musculi tergo-pleuralis* del mesotorace, il cui muscolo è però spesso assente nel metatorace (La Greca, 1947). Come si rileva facilmente, l'unica differenza esistente fra il *n. lateralis secundus* del 2° e quello del 3° ganglio consiste nel fatto che, mentre il *n. musculi extensoris tegminis* e il *n. musculi abductoris coxae* hanno ciascuno una origine indipendente nel mesotorace, i due nervi corrispondenti nel metatorace hanno invece un'origine comune.

Anche in *Carausius morosus*, secondo quanto descritto da Marquardt, il *n. lateralis secundus* innerva i muscoli pleuro-sternali, tergo-pleurali e protrattori tergali.

N. lateralis dorsalis (figg. 2, 8, 9).

Questo nervo è il più posteriore dei nervi laterali che inviano rami ai muscoli degli organi di volo. Nel mesotorace, esso si dirige in dietro, passando esternamente alla furca, aggira il margine posteriore dell'anca (e precisamente i muscoli primo e secondo adduttori dell'anca) e risale lungo il lato

anteriore del muscolo primo retrattore tergale dell'anca prima di penetrare fra le sue fibre per innervarlo (*n. musculi primi retractoris tergalis coxae*, nrc_1). Dal margine posteriore di questo nervo, poco prima che esso penetri nel muscolo, partono tre rami: il primo è il *n. musculi depressoris-extensoris tegminis*, *ndt*) che, dopo aver aderito per breve tratto alla parte basale della superficie mediale del muscolo che deve innervare, vi penetra mediante due rami; il secondo si dirige verso l'alto fino ad innervare il muscolo flessore della tegmina (*n. musculi flexoris tegminis*, *nfl*); nel suo decorso esso invia un breve ramo al muscolo depressore-estensore della tegmina ed al muscolo secondo retrattore tergale dell'anca; il terzo non interessa gli organi di volo ed è il *n. musculi secundi retractoris tergalis coxae*, (nrc_2).

Nel metatorace si ritrovano tutti e quattro gli stessi nervi, i quali però si staccano dal *n. lateralis dorsalis*, quasi nello stesso punto.

Conclusione

Da quanto ho sopra esposto si può concludere:

— che tutti i nervi sensori degli organi di volo (*n. jugalis*, *n. tegminis*, *n. alae*) raggiungono solo il *n. anterior*; quest'ultimo nervo provvede col *n. musculi longitudinalis dorsalis* ai movimenti di abbassamento degli organi di volo e non innerva alcun muscolo delle zampe;

— che il *n. lateralis secundus* provvede con i *n. musculi levatoris tegminis* e *alae* e *n. musculi extensoris tegminis e alae* ai movimenti di apertura, sollevamento e pronazione degli organi di volo; tutti i muscoli che esso innerva appartengono alla regione episternale di ciascun segmento;

— che il *n. lateralis dorsalis* provvede con i *n. musculi depressoris-extensoris tegminis* e *alae* e i *n. musculi flexoris tegminis* ai movimenti di chiusura, sollevamento e depressione degli organi di volo. Tutti i muscoli che esso innerva appartengono alla regione epimerale di ciascun segmento.

BIBLIOGRAFIA

1943 Hodge C., *The internal anatomy of* Leptysma marginicollis *and of* Opsomala vitreipennis. J. Morph. Philadelphia, 72, pag. 87.

1910 Holste G., *Das Nervensystem von* Dytiscus marginalis. Zeitschr. wiss. Zool., 96, pag. 419.

1940 Jannone G., *Studio morfologico, anatomico e istologico del* Dociostaurus maroccanus (Thumb). Boll. R. Lab. Ent. Agraria Portici, IV, pag. 3.

1947 La Greca M., *Morfologia funzionale dell' articolazione alare degli Ortotteri.* Arch. Zool. Ital., XXXII, pag. 271.

1936 Maki T., *Studies of the skeletal structure, musculature and nervous system of the Alder Fly* Chauliodes formosanus Peters. Mem. Fac. Sc. Agr. Taihoku Imp. Un., XVI, 3.

1940 Marquardt F., *Beiträge zur Anatomie der Muskulatur und der peripheren Nerven von* Carausius (Dixippus) morosus Br. Zool. Jahrb. Anat., 66, pag. 63.

1934 Zacwilichowski J., *Ueber die Innervierung und die Sinnesorgane der Flügel der Feldheuschrecke* Stauroderus biguttulus. Bull. int. Acad. Cracovie, B II, pag. 187.

Sulla rappresentazione geometrica di alcune algebre reali del 3° ordine

Nota di **Ulderico Bencivenga**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 5 giugno 1948)

Sunto. — Si applicano i sistemi metrici della Nota del 6 marzo 1948 (serie IV, vol. XV) alla rappresentazione geometrica di alcune algebre reali dotate di modulo e commutative del 3° ordine.

I

In questa Nota studieremo la rappresentazione geometrica nell'S_3 reale euclideo di alcune algebre reali dotate di modulo e commutative del 3° ordine in relazione ai 4 sistemi metrici esposti nella Nota indicata con *(F)* nell'elenco qui sotto riportato [1]). Considereremo 5 algebre siffatte, di cui tre riducibili e due irriducibili. Le tre prime sono determinate dalle seguenti tabelle di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_2	u_3
u_3	0	u_3	$-u_2$

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_2	0
u_3	0	0	u_3

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	0	u_2
u_3	0	u_2	u_3

---

[1]) Credo utile elencare qui, una volta per tutte, i miei lavori che avremo occasione di citare in appresso:

(A) « *Geometria e Trigonometria iperboliche e fondamenti di una Geometria a metri variabili* ». Presso l'A., Viale di Villa Massimo 24, Roma.

(B) « *Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo* ». Memoria inserita nel vol. II, Serie 3ª, n 7 degli Atti della R. Acc. Sc. fis. e mat. della Società Reale di Napoli. (Adunanza del 3 gennaio 1942).

(C) « *Su di un tipo di algebra di ordine n* ». Rend. della menzionata Accademia, Serie 4ª, vol. XIV, 1946 (Adunanza del 5 febbraio 1946).

(D) « *Su di un' espressione degli elementi di un tipo di algebra di ordine n mediante certe funzioni esponenziali* ». Rend. della stessa Accademia Serie 4ª, vol. XIV, 1946 (Adunanza del 7 maggio 1946).

(E) « *Su di un altro tipo di algebra di ordine n* ». Rend. della stessa Accademia, Serie 4ª, vol. XV, 1947 (Adunanza del 4 marzo 1947).

(F) « *Di alcuni sistemi metrici nello spazio a tre dimensioni* ». Nota presentata alla suddetta Accademia. Serie 4ª, vol. XV 1948 (Ad. del 6 marzo 1948).

cui corrispondono le matrici:

$$\begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & -b_3 & b_2 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}$$

e le altre due dalle seguenti tabelle di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u	u_2	u_3	0
u_3	u_3	0	0

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	0	0
u_3	u_3	0	0

cui corrispondono le matrici:

$$\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{Vmatrix}$$

La prima deriva dal tipo di algebra studiato nella Nota *(C)* applicato al caso di $n = 3$, e la seconda, prolungata nel corpo complesso, dà luogo all'algebra dei numeri tricomplessi. La prima è la somma diretta di due algebre reali, una equivalente al corpo numerico reale e l'altra equivalente al corpo numerico complesso.

Se $b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3$ è un elemento di una qualunque delle algebre sopra elencate, esso può essere messo, come abbiamo visto in precedenti Note, sotto la forma $\delta\left[\frac{b_1}{\delta}u_1+\frac{b_2}{\delta}u_2+\frac{b_3}{\delta}u_3\right]$ che diremo *polare*, nella quale δ è il *modulo* che nella Nota *(E)* è stato definito, per un'algebra reale di grado n, come *la radice positiva n.ma del valore assoluto del determinante della matrice dell' elemento.*

Questi moduli sono, per le 5 algebre considerate, rispettivamente i seguenti:

$$\sqrt[3]{b_1(b_2^2+b_3^2)} \qquad \sqrt[3]{b_1b_2b_3} \qquad \sqrt[3]{b_1b_2^2} \qquad b_1 \qquad b_1$$

Vedemmo già, per le algebre doppie dotate di modulo *(B)* che il modulo di un elemento come ora definito, geometricamente interpretato, è la misura del vettore del punto rappresentativo nel sistema metrico corrispondente. Assai più in generale vedemmo applicato lo stesso concetto per alcune

algebre di n.mo ordine *(E)*. Ora, se noi vogliamo rappresentare geometricamente gli elementi delle 5 algebre sopra elencate nell'S_3 reale euclideo mediante punti di coordinate $b_1\, b_2\, b_3$ rispetto a 3 assi ortogonali e interpretare i loro moduli come abbiamo testè detto, è necessario leggermente modificare le superficie [formole (6) della *F*] che definiscono i sistemi metrici che faremo corrispondere alle algebre stesse. Le superficie così modificate sono le seguenti:

$$Y_1(Y_2^2+Y_3^2)=\pm 1 \qquad Y_1Y_2Y_3=\pm 1 \qquad Y_1Y_3^2=\pm 1 \qquad Y_1=\pm 1.$$

La rappresentazione geometrica dei primi tre tipi, cioè delle algebre riducibili, verrà svolta nei sistemi metrici definiti dalle tre prime superficie, e gli altri due tipi, cioè le irriducibili, in quello definito dalla coppia di piani espressa con l'ultima equazione.

Ciò premesso, passiamo a trattare delle singole algebre nell'ordine tenuto in principio.

II

Algebra n. 1.

$$\begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & -b_3 & b_2 \end{Vmatrix}$$

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_2	u_3
u_3	0	u_3	$-u_2$

Quest'algebra è, come abbiamo già detto, somma diretta di un'algebra equivalente al corpo numerico reale e di una equivalente al corpo numerico complesso con le unità u_2 e u_3.

1. Il sistema metrico nel quale svolgeremo la rappresentazione geometrica di essa è definito dalla superficie $Y_1(Y_2^2+Y_3^2)=\pm 1$. Per la forma di questa rimandiamo alla Nota *(F)*.

2. Le funzioni $Y_1\ Y_2\ Y_3$ (form. 22 della *F*), modificate secondo la nuova equazione della superficie dei metri, sono:

$$Y_1=\pm e^{2a_0\mu} \qquad Y_2=e^{-a_0\mu}\cos\gamma \qquad Y_3=-e^{-a_0\mu}\operatorname{sen}\gamma$$

che soddisfano evidentemente all'equazione della superficie. In esse γ è un angolo circolare e μ un modulo d'arco di meridiano della superficie stessa *(F)*.

3. La forma polare dell'elemento $x=b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3$ è:

$$\delta(\pm Y_1u_1+Y_2u_2+Y_3u_3)=\delta(\pm e^{2a_0\mu}\,.\,u_1+e^{-a_0\mu}\cos\gamma\,.\,u_2-e^{-a_0\mu}\operatorname{sen}\gamma\,.\,u_3)$$

dove $Y_1\ Y_2\ Y_3$ sono le coordinate del punto d'incontro del vettore del punto $(b_1 b_2 b_3)$ con la superficie dei metri e $\delta = \sqrt[3]{b_1(b_2^2+b_3^2)}$ il modulo. Da questa forma appare evidente come la x sia la somma di un elemento dell'algebra di ordine 1 e di unità u_1 che si svolge lungo l'asse Y_m, e di un elemento dell'algebra di ordine 2 e di unità u_2 e u_3 la quale si svolge in un sistema circolare sul piano $Y_n\ Y_p$ *(B)*.

4. Il prodotto di due elementi x e x_1 determinati da δ, μ, γ e $\delta_1, \mu_1, \gamma_1$ è dato da:

$$\delta\delta_1\left[\pm e^{2a_0(\mu+\mu_1)}\,.\,u_1 + e^{-a_0(\mu+\mu_1)}\cos(\gamma+\gamma_1)\,.\,u_2 - e^{-a_0(\mu+\mu_1)}\,\mathrm{sen}(\gamma+\gamma_1)\,.\,u_3\right]$$

Quindi il modulo del prodotto di due elementi è uguale al prodotto dei moduli e l'argomento è uguale alla somma degli argomenti dei fattori.

Perchè il prodotto sia nullo è necessario e sufficiente o che uno degli elementi abbia la matrice nulla o che siano nulli entrambi i moduli di essi. I divisori dello zero, dovendo avere il modulo nullo, sono rappresentati dai punti dell'asse e del piano assintotici.

Diremo reciproci due elementi rappresentati da due punti posti sui vettori di punti reciproci *(F)*. Si dimostra facilmente che il loro prodotto è dato da $\delta\delta_1(\pm u_1 + \cos 2\gamma\,.\,u_2 - \mathrm{sen}\,2\gamma\,.\,u_3)$ essendo γ l'angolo circolare relativo al piano meridiano contenente i punti reciproci. Su di uno stesso piano meridiano vi sono quindi infinite coppie di elementi i cui prodotti sono proporzionali al prodotto dei moduli. In particolare, se i punti rappresentativi dei due elementi stanno sulla stessa curva meridiana, il loro prodotto è costante.

5. Essendo l'algebra in esame la somma diretta delle due algebre anzidette, una funzione totalmente derivabile di x sarà così espressa:

$$f(x) = f_1(b_1)u_1 + f_2(b_2 b_3)u_2 + f_3(b_2 b_3)u_3$$

essendo $\dfrac{\partial f_2}{\partial b_3} = -\dfrac{\partial f_3}{\partial b_2}\quad \dfrac{\partial f_2}{\partial b_2} = \dfrac{\partial f_3}{\partial b_3}$, e la sua derivata prima sarà data da:

$$f'(x) = f'_1(b_1)\,.\,u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial b_2}u_2 + \frac{\partial f_2}{\partial b_2}u_3.$$

6. Sia la serie $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_r x^r + \ldots$ in cui $x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3$ e $A_r = m_r u_1 + n_r u_2 + p_r u_3$ (m, n, p, quantità reali). Applicando le regole della moltiplicazione esposte sopra e ponendo $\dfrac{n_r}{\sqrt{n_r^2+p_r^2}} = \cos\omega_r \qquad \dfrac{p_r}{\sqrt{n_r^2+p_r^2}} = \mathrm{sen}\,\omega_r \qquad \sqrt{n_r^2+p_r^2} = \varepsilon_r$, si ha:

$$f(x) = \sum_0^\infty \pm m_r \left(\partial e^{2a_0\mu}\right)^r . u_1 + \sum_0^\infty \varepsilon_r \left(\partial e^{-a_0\mu}\right)^r [\cos(r\gamma - \omega_r) . u_2 - \operatorname{sen}(r\gamma - \omega_r) . u_3]$$

Poichè $\partial e^{2a_0\mu} = b_1$ e $\partial e^{-a_0\mu} = \partial \sqrt{Y_2^2 + Y_3^2} = \sqrt{b_2^2 + b_3^2}$, indicando con ρ il valore assoluto di quest'ultimo radicale, la formola precedente può scriversi:

$$f(x) = \sum_0^\infty \pm m_r b_1^r . u_1 + \sum_0^\infty \varepsilon_r \rho^r [\cos(r\gamma - \omega_r) . u_2 - \operatorname{sen}(r\gamma - \omega_r) . u_3].$$

Il primo termine del secondo membro è una serie di potenze intere di numeri dell'algebra di ordine 1 con l'unità u_1 e l'altro è una serie di potenze intere di numeri dell'algebra di ordine 2 con le unità u_2 e u_3 equivalente al corpo complesso. Per la convergenza di $f(x)$ dovranno dunque essere convergenti contemporaneamente le due serie, il che richiede la convergenza di $\sum_0^\infty m_r b_1^r$ e di $\sum_0^\infty \varepsilon_r \rho^r$. Se $-K, K$ è l'intervallo di convergenza della prima e R il raggio di convergenza della seconda, si dovrà avere $b_1 < K$ e $\sqrt{b_2^2 + b_3^2} < R$. Ciò vuol dire che il punto rappresentativo di x deve cadere entro il cilindro di asse Y_m a sezione circolare di raggio R, diviso dal piano assintotico in due tronchi uguali di altezza K. Si dimostra facilmente che anche $f'(x)$ avrà lo stesso cilindro di convergenza di $f(x)$.

7. Vediamo l'integrale definito di una funzione $f(x)$ totalmente derivabile e finita e continua lungo un arco di curva AB. Per le ragioni richiamate al n. 5 esso sarà la somma dell'integrale di $f_1(b_1)$ e di quello della funzione $f_2(b_2 b_3)u_2 + f_3(b_2 b_3)u_3$ nell'algebra equivalente al corpo complesso. È noto che quest'ultimo è dato da:

$$\int [f_2(b_2 b_3)db_2 - f_3(b_2 b_3)db_3] . u_2 + \int [f_2(b_2 b_3)\, db_3 + f_3(b_2 b_3)db_2] . u_3$$

quindi:

$$\int_A^B f(x)dx = \int_A^B f_1(b_1)db_1 . u_1 + \int_A^B [f_2(b_2 b_3)db_2 - f_3(b_2 b_3)db_3] . u_2 + \\ + \int_A^B [f_2(b_2 b_3)db_3 + f_3(b_2 b_3)db_2] . u_3.$$

Supponiamo che invece di un arco si abbia una linea chiusa. In tal caso è noto che l'integrale della funzione $f_2(b_2 b_3)u_2 + f_3(b_2 b_3)u_3$ è nullo; e, poichè è evidentemente nullo anche l'integrale di $f_1(b_1)$, potremo concludere che l'integrale $\int f'(x)dx$, quando sia preso lungo un contorno chiuso sul quale

la $f(x)$ sia finita e continua, è uguale a zero. Ne segue che gli integrali di $f(x)$ presi lungo curve qualunque congiungenti due punti fissi sono uguali, purchè su di esse la funzione sia finita e continua.

8. Sia $f(z)$ una funzione totalmente derivabile in uno spazio finito S limitato da una superficie σ e finita e continua su tutta questa superficie. Se x è un punto di S, la funzione $\frac{f(z)}{z-x}$ è olomorfa nel medesimo spazio salvo nel punto $z = x$. Consideriamo una sfera di centro x e raggio infinitesimo e tagliamo questa sfera con un piano parallelo al piano assintotico che non passi per x. Diciamo c il cerchio sezione. Immaginiamo tracciata sulla superficie σ una linea chiusa C qualunque ed applichiamo alla funzione $\frac{f(z)}{z-x}$ il teorema del numero precedente considerando il percorso chiuso formato dalla linea C, dal cerchio c e da una loro congiungente qualsiasi. Si avrà, scegliendo opportunamente il senso delle curve:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_c \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Il valore di $f(z)$ in un punto z qualunque del cerchio c differirà di una quantità infinitesima da quello di $f(x)$, cioè sarà $f(z) = f(x) + \nu$, essendo ν quantità infinitesima. Si avrà pertanto:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x)\int_c \frac{dz}{z-x} + \int_c \frac{\nu\,dz}{z-x}.$$

Vediamo il valore del primo integrale del secondo membro. Conduciamo per l'origine il vettore parallelo alla congiungente x con z e siano $Y_1 Y_2 Y_3$ le coordinate del punto in cui esso incontra la superficie dei metri. Prendiamo su questo vettore il punto rappresentante $z-x$. Adottando la forma polare può scriversi $z-x = \partial(Y_1 u_1 + Y_2 u_2 + Y_3 u_3)$ dove $Y_1 = \pm e^{2a_0\mu}$ $Y_2 = e^{-a_0\mu}\cos\gamma$ $Y_3 = -e^{-a_0\mu}\operatorname{sen}\gamma$, ∂ il modulo della congiungente x con z e μ il modulo d'arco di meridiano della superficie dei metri relativo al punto $Y_1 Y_2 Y_3$. Poichè le congiungenti x con i punti di c sono tutte ugualmente inclinate rispetto all'asse assintotico, è evidente che ∂ e μ hanno gli stessi valori per tutti i punti di c. Ciò posto si ha:

$$\frac{d(z-x)}{z-x} = \frac{dY_1\cdot u_1 + dY_2\cdot u_2 + dY_3\cdot u_3}{Y_1 u_1 + Y_2 u_2 + Y_3 u_3} = \frac{dY_1}{Y_1}u_1 + \frac{Y_2 dY_2 + Y_3 dY_3}{Y_2^2 + Y_3^2}u_2 + \frac{Y_2 dY_3 - Y_3 dY_2}{Y_2^2 + Y_3^2}u_3.$$

Sostituendo nel secondo membro al posto delle Y i loro valori espressi me-

diante μ e γ, si avrà infine:

$$\int_c \frac{dz}{z-x} = -u_3 \int_0^{2\pi} d\gamma = -2\pi u_3$$

Vediamo ora il valore dell'integrale $\int_c \frac{\nu dz}{z-x}$. Esso è indipendente dal raggio r del cerchio c: ora, se ν si mantiene inferiore a un certo numero positivo η, il coefficiente di u_3 nell'integrale è minore di $\frac{\eta}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\eta$. Ma, poichè la funzione $f(z)$ è continua per $z=x$, si può scegliere il raggio r abbastanza piccolo affinchè η sia piccolo quanto si vuole. L'integrale tende dunque a zero e quindi si ha infine: $\int_C \frac{f(z)}{z-x} dz = -2\pi u_3 f(x)$ da cui:

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi u_3} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Questa formola dà il valore della funzione f in un punto qualunque x interno allo spazio S per mezzo dei valori della funzione stessa lungo una qualunque curva chiusa tracciata sulla superficie σ che delimita lo spazio S. Da questa formola discendono proprietà analoghe a quelle che, in base alla formola fondamentale di Cauchy, si verificano nel piano per le funzioni olomorfe. Basterà seguire i noti procedimenti usati per esse. Ad es., se $f(z)$ è una funzione totalmente derivabile nell'interno di un cilindro circolare di centro a, con l'asse parallelo all'asse delle Y_m e x è un punto interno ad esso, si ha la formola:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots\ldots + \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \ldots\ldots$$

in cui la serie del secondo membro è convergente.

9. Sia $f(x) = f_1(b_1)u_1 + f_2(b_2b_3)u_2 + f_3(b_2b_3)u_3$ una funzione totalmente derivabile di $x = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$. Al punto di coordinate $b_1b_2b_3$, rappresentativo di x, corrisponderà il punto di coordinate $f_1f_2f_3$ rappresentativo di $f(x)$. Consideriamo un incremento infinitesimo ds di x e il corrispondente dS di $f(x)$. Diciamo $Y_1Y_2Y_3$ le coordinate del punto d'incontro del vettore parallelo a ds con la superficie dei metri e $Z_1Z_2Z_3$ quelle analoghe di dS. Per definizione si ha:

$$\text{mod. } ds = \frac{db_1}{Y_1} = \frac{db_2}{Y_2} = \frac{db_3}{Y_3} \text{ ovvero mod. } ds = \frac{db_1}{e^{2a_0\mu}} = \frac{db_2}{e^{-a_0\mu}\cos\gamma} = \frac{db_3}{e^{-a_0\mu}\operatorname{sen}\gamma}$$

$$\text{mod. } dS = \frac{df_1}{Z_1} = \frac{df_2}{Z_2} = \frac{df_3}{Z_3} \text{ ovvero mod. } dS = \frac{df_1}{e^{2a_0\mu_1}} = \frac{df_2}{e^{-a_0\mu_1}\cos\gamma_1} = \frac{df_3}{e^{-a_0\mu_1}\operatorname{sen}\gamma_1}$$

da cui

$$\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds} = \frac{df_1}{db_1} e^{-2a_0(\mu_1-\mu)} \qquad \left(\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds}\right)^2 = \frac{\overline{df_2}^2 + \overline{df_3}^2}{\overline{db_2}^2 + \overline{db_3}^2} e^{2a_0(\mu_1-\mu)} \quad (1)$$

Calcolando i differenziali totali df_2 e df_3 avendo presenti le condizioni di derivabilità totale di $f(x)$ di cui al n. 5, si ha:

$$\left(\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial b_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial b_2}\right)^2\right] e^{2a_0(\mu_1-\mu)}$$

cosicchè infine si avrà

$$\left(\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds}\right)^3 = \frac{df_1}{db_1}\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial b_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial b_2}\right)^2\right].$$

Di qui, estraendo la radice cubica, si ricava che il rapporto dei moduli degli incrementi corrispondenti tende al modulo del vettore del punto rappresentativo di $f'(x)$. Segue da ciò e dalla prima delle (1) che $\mu_1-\mu$ dipende solo dal punto x. Inoltre poichè $\text{tg}\,\gamma_1 = -\frac{df_2}{df_3}$ $\text{tg}\,\gamma = -\frac{db_2}{db_3}$, tenendo conto delle condizioni di derivabilità di $f(x)$, si ricava $\text{tg}(\gamma_1-\gamma) = -\frac{\partial f_3}{\partial b_2} : \frac{\partial f_2}{\partial b_2}$, cioè anche $\gamma_1-\gamma$ dipende solo dal punto x. Dunque l'angolo della coppia dS-ds rappresentato dal simbolo $(\mu_1-\mu,\ \gamma_1-\gamma)$ è uguale per tutte le coppie di incrementi uscenti da due punti corrispondenti. Chiamando $\delta_0, \mu_0, \gamma_0$, il modulo e gli argomenti di $f'(x)$ si ha $f'(x) = f'_1(b_1)u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial b_2}u_2 + \frac{\partial f_3}{\partial b_2}u_3 =$ $\delta_0\left[e^{2a_0\mu_0}.u_1 + e^{-a_0\mu_0}\cos\gamma_0.u_2 - e^{-a_0\mu_0}\,\text{sen}\,\gamma_0.u_3\right]$ donde $\delta_0 = f'_1(b_1)e^{-2a_0\mu_0}$ $\text{tg}\,\gamma_0 = -\frac{\partial f_3}{\partial b_2} : \frac{\partial f_2}{\partial b_2}$. Paragonando queste formole con quelle che danno il rapporto dei moduli degli incrementi ds e dS e $\text{tg}(\gamma_1-\gamma)$, si ha subito $\mu_0 = \mu_1-\mu$ $\gamma_0 = \gamma_1-\gamma$. Dunque l'angolo della coppia dS-ds ha la stessa misura di quello della coppia elementare formata dal vettore di $f'_1(x)$.

Da quanto sopra risulta anche che, considerando 2 coppie corrispondenti d'incrementi uscenti da x ed $f(x)$, i triangoli infinitesimi da essi formati, per l'uguaglianza degli angoli e la proporzionalità dei moduli dei lati omologhi, possono chiamarsi *similari* come altrove [(*A*) e (*B*)] abbiamo fatto. A quanto precede può darsi il nome di rappresentazione conforme.

III

Algebra n. 2.

$$\begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{Vmatrix}$$

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_2	0
u_3	0	0	u_3

1. Il sistema metrico corrispondente è determinato dalla superficie $Y_1\,Y_2\,Y_3 = \pm 1$ e ad esso riferiremo i punti di coordinate $b_1\ b_2\ b_3$ rappresentativi degli elementi dell'algebra. Rimandiamo alla *(F)* per la forma della superficie.

2. Le funzioni $Y_1\ Y_2\ Y_3$ (form. 40 della *F*), modificate in relazione alla nuova equazione della superficie dei metri, sono:

$$Y_1 = \pm e^{2a_0\mu} \qquad Y_2 = e^{-a_0\mu+\gamma} \qquad Y_3 = e^{-a_0\mu-\gamma}$$

dove γ è un angolo iperbolico nel sistema omonimo sul piano $Y_n\ Y_p\ (B)$ e μ un modulo d'arco di meridiano della superficie.

3. La forma polare dell'elemento $x = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$ è:

$$\delta\,(\pm Y_1u_1 + Y_2u_2 + Y_3u_3) = \delta\left(\pm e^{2a_0\mu}\,.\,u_1 + e^{-a_0\mu+\gamma}\,.\,u_2 + e^{-a_0\mu-\gamma}\,.\,u_3\right)$$

dove $Y_1\ Y_2\ Y_3$ sono le coordinate del punto d'incontro del vettore del punto $(b_1b_2b_3)$ con la superficie dei metri e $\delta = \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$ il modulo. Da questa forma la x risulta subito come la somma di un elemento dell'algebra di ordine 1 e di unità u_1 e di un elemento dell'algebra dei numeri bireali di unità u_2 e u_3.

4. Il prodotto di due elementi x e x_1 determinati da δ, μ, γ, e δ_1, μ_1, γ_1, è dato da:

$$\delta\delta_1\left[\pm e^{2a_0(\mu+\mu_1)}\,.\,u_1 + e^{-a_0(\mu+\mu_1)+(\gamma+\gamma_1)}\,.\,u_2 + e^{-a_0(\mu+\mu_1)-(\gamma+\gamma_1)}\,.\,u_3\right].$$

Quindi: il modulo del prodotto di due elementi è uguale al prodotto dei moduli ed i suoi argomenti sono uguali alla somma degli argomenti dei fattori. Perchè un prodotto sia nullo è necessario e sufficiente: o che sia nullo uno degli elementi o che siano nulli entrambi i moduli degli elementi

stessi. Gli elementi divisori dello zero, dovendo avere il modulo nullo, sono rappresentati dai punti dei piani coordinati, che sappiamo essere *(F)* i piani assintotici della superficie dei metri.

5. Essendo l'algebra in esame la somma di un'algebra di ordine 1 e di una di numeri bireali o, ciò che equivale, alla somma di tre algebre di ordine 1, una funzione totalmente derivabile di x avrà la forma:

$$f(x) = f_1(b_1)\,u_1 + f_2(b_2)\,u_2 + f_3(b_3)\,u_3$$

e la sua derivata r.ma la forma:

$$f^{(r)}(x) = f_1^{(r)}(b_1)\,u_1 + f_2^{(r)}(b_2)\,u_2 + f_3^{(r)}(b_3)\,u_3$$

sempre che la $f(x)$ sia definita in un certo spazio S e le funzioni $f_1\,f_2\,f_3$ siano derivabili rispetto a $b_1\,b_2\,b_3$.

6. Per lo stesso motivo, una serie di potenze $f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_rx^r + \ldots$, dove $A_r = m_ru_1 + n_ru_2 + p_ru_3$ (m, n, p reali), avrà la forma $\sum_0^\infty m_rb_1^r \cdot u_1 + \sum_0^\infty n_rb_2^r \cdot u_2 + \sum_0^\infty p_rb_3^r \cdot u_3$. Detti $-K_1, K_1$; $-K_2, K_2$; $-K_3, K_3$ gli intervalli di convergenza delle tre serie, i punti rappresentativi degli elementi dell'algebra, per i quali $f(x)$ è convergente, cadono nell'interno di un parallelepipedo col centro nell'origine e gli spigoli paralleli agli assi $Y_m\,Y_n\,Y_p$, di lunghezza $2K_1, 2K_2, 2K_3$ rispettivamente. La derivata r.ma di $f(x)$ avrà lo stesso parallelepipedo di convergenza di $f(x)$.

7. L'integrale definito di una funzione $f(x)$ totalmente derivabile, preso lungo un arco di curva AB sul quale essa sia finita e continua, sarà dato dalla formola $\int_A^B f(x)\,dx = \int_A^B f_1(b_1)db_1 \cdot u_1 + \int_A^B f_2(b_2)db_2 \cdot u_2 + \int_A^B f_3(b_3)db_3 \cdot u_3$. Quando questo integrale è preso lungo un contorno chiuso, esso è evidentemente nullo. Ne segue che quando esso è preso da un punto fisso ad un altro punto fisso, ha lo stesso valore qualunque sia il percorso che si segue, purchè lungo questo la $f(x)$ sia finita e continua.

8. Anche per quest'algebra si verifica quella che abbiamo precedentemente chiamata rappresentazione conforme. Se ds e dS sono due incrementi infinitesimi di x e di $f(x)$ uscenti da due punti corrispondenti, e $\mu, \gamma, \mu_1, \gamma_1$, gli argomenti relativi ai vettori della superficie dei metri paralleli ad essi, si ha per definizione e dopo aver posto in luogo di $Y_1\,Y_2\,Y_3$ i valori in funzione degli argomenti suddetti:

$$\text{mod. } ds = \frac{db_1}{e^{2a_0\mu}} = \frac{db_2}{e^{-a_0\mu+\gamma}} = \frac{db_3}{e^{-a_0\mu-\gamma}}$$

$$\text{mod. } dS = \frac{df_1}{e^{2a_0\mu_1}} = \frac{df_2}{e^{-a_0\mu_1+\gamma_1}} = \frac{df_3}{e^{-a_0\mu_1-\gamma_1}}$$

donde:

$$\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds} = f_1'(b_1) \cdot e^{-2a_0(\mu_1-\mu)} = f_2'(b_2) \cdot e^{a_0(\mu_1-\mu)-(\gamma_1-\gamma)} = f_3'(b_3) \cdot e^{a_0(\mu_1-\mu)+(\gamma_2-\gamma)}$$

e infine:

$$\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds} = \sqrt[3]{f_1'(b_1) \cdot f_2'(b_2) \cdot f_3'(b_3)}.$$

Dunque il rapporto dei moduli di due incrementi infinitesimi corrispondenti tende al valore del modulo del vettore del punto che rappresenta la derivata prima di $f(x)$ e dipende quindi soltanto dalla posizione di x. Risulta allora subito dalle ultime uguaglianze che tanto $\mu_1-\mu$ che $\gamma_1-\gamma$ sono costanti per lo stesso punto x, cioè il valore dell'angolo della coppia dS-ds è costante per tutti gli elementi uscenti da esso. Ora se diciamo Δ, μ_0, γ_0, il modulo e gli argomenti del vettore del punto-derivata prima, si ha $\Delta = \frac{f_1'(b_1)}{e^{2a_0\mu_0}} = \frac{f_2'(b_2)}{e^{-a_0\mu_0+\gamma_0}} = \frac{f_3'(b_3)}{e^{-a_0\mu_0-\gamma_0}}$. Se ne deduce che $\mu_1-\mu=\mu_0$; $\gamma_1-\gamma=\gamma_0$, cioè il valore dell'angolo della coppia dS-ds è uguale a quello della coppia elementare formata dal vettore del punto-derivata prima.

Considerando i triangoli infinitesimi formati dagli incrementi ds e ds uscenti da x ed i corrispondenti dS e dS' uscenti da $f(x)$, si ha dunque uguaglianza di angoli e proporzionalità di moduli dei lati corrispondenti e potremo perciò chiamarli *similari* con termine da me altrove usato.

IV.

Algebra n. 3.

$$\begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}$$

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	0	u_2
u_3	0	u_2	u_3

Come è noto, essa è la somma di un'algebra reale di ordine 1 con la unità u_1 e di un'algebra di numeri duali con le unità u_2 e u_3.

1. Il sistema metrico nel quale svolgeremo la rappresentazione di quest'algebra è definito dalla superficie di equazione $Y_1 Y_3^2 = \pm 1$ per la forma della quale rimandiamo alla Memoria *(F)*.

2. Le funzioni Y_1 Y_2 Y_3 (form. 46 di *F*). modificate in relazione a

detta superficie e dopo aver sostituito $\sigma\gamma$ con $a_0\mu$, divengono:

$$Y_1 = \pm e^{2a_0\mu} \qquad Y_2 = \gamma e^{-a_0\mu} \qquad Y_3 = e^{-a_0\mu}$$

dove (F' n. 8) γ è un angolo rettilineo nel sistema retto *(B)* tracciato sul piano $Y_m Y_p$ e μ il modulo di un arco di meridiano.

3. La forma polare dell'elemento generico $x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3$ è:

$$\delta(\pm Y_1 u_1 + Y_2 u_2 + Y_3 u_3) = \delta\left(\pm e^{2a_0\mu} \cdot u_1 + \gamma e^{-a_0\mu} \cdot u_2 + e^{-a_0\mu} \cdot u_3\right)$$

dove $Y_1\ Y_2\ Y_3$ sono le coordinate del punto d'incontro del vettore del punto $(b_1 b_2 b_3)$ con la superficie dei metri e $\delta = \sqrt[3]{b_1 b_3^2}$ il modulo.

4. Il prodotto di due elementi x e x_1 determinati dalle quantità δ, γ, μ e $\delta_1, \gamma_1, \mu_1$ rispettivamente, è dato da:

$$x x_1 = \delta\delta_1 \left| \pm e^{2a_0(\mu+\mu_1)} \cdot u_1 + (\gamma+\gamma_1) e^{-a_0(\mu+\mu_1)} \cdot u_2 + e^{-a_0(\mu+\mu_1)} \cdot u_3 \right|.$$

Quindi il modulo del prodotto di due elementi è uguale al prodotto dei moduli e i suoi argomenti sono uguali alla somma degli argomenti dei fattori.

Gli elementi divisori dello zero, dovendo avere il modulo nullo, sono rappresentati dai punti dei piani coordinati $Y_n Y_p$ e $Y_m Y_n$.

5. Poichè quest'algebra è, come abbiamo detto in principio, la somma di un'algebra di ordine 1 con l'unità u_1 e di un'algebra di numeri duali con le unità u_2 e u_3, una funzione totalmente derivabile di essa, tenuto presente quanto svolgemmo nella Memoria *(B)* (Cap. III & 2), avrà la forma:

$$f(x) = f_1(b_1) u_1 + [b_2 f_3'(b_3) + \varphi(b_3)] u_2 + f_3(b_3) u_3$$

e la sua derivata prima la forma:

$$f'(x) = f_1'(b_1) u_1 + \frac{\partial f_3}{\partial b_3} \cdot u_2 + \frac{df_3}{db_3} \cdot u_3 = f_1'(b_1) u_1 + [b_2 f_3''(b_3) + \varphi'(b_3)] u_2 + f_3'(b_3) u_3 .$$

6. Una serie di potenze $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_r x^r + \ldots$ dove $A_r = m_r u_1 + n_r u_2 + p_r u_3$ (m, n, p reali) si trasforma, eseguendo le operazioni, in

$$f(x) = \sum_0^\infty m_r b_1^r \cdot u_1 + \left(b_2 \sum_0^\infty r p_r b_3^r + \sum_0^\infty n_r b_3^r \right) u_2 + \sum_0^\infty p_r b_3^r \cdot u_3 .$$

Ora, a parte le differenti notazioni, i due ultimi termini del secondo membro rappresentano (B. Cap. III & 2) la serie di potenze del numero duale $b_2u_2+b_3u_3$, la quale, in conformità di quanto allora vedemmo, è convergente quando siano convergenti le due serie $\sum_0^\infty n_r b_3^r$ e $\sum_0^\infty p_r b_3^r$. Quindi le condizioni necessarie e sufficienti affinchè $f(x)$ sia convergente sono che queste due serie, insieme alla serie $\sum_0^\infty m_r b_1^r$ siano contemporaneamente convergenti. Se $-K, K$ è l'intervallo di convergenza di $\sum_0^\infty m_r b_1^r$ e $-K_1, K_1$ il più piccolo degli intervalli di convergenza delle altre due serie, è facile determinare il parallelepipedo indefinito entro il quale dovranno cadere i punti rappresentativi delle x che rendono convergente $f(x)$. Per questi punti risulterà convergente anche $f'(x)$.

7. L'integrale definito di una funzione $f(x)$ totalmente derivabile, preso lungo un arco di curva AB sul quale essa si mantenga finita e continua, si ottiene sommando gli integrali delle due algebre componenti. Si ha quindi la formola:

$$\int_A^B f(x)dx = \int_A^B f_1(b_1)db_1 \cdot u_1 + \int_A^B f_2(b_2b_3)db_3 \cdot u_2 + \int_A^B f_3(b_3)db_3 \cdot u_3$$

dove la somma dei due ultimi integrali rappresenta (B. Cap. III & 3) l'integrale definito di una funzione della variabile $b_2u_2 + b_3u_3$.

Anche per quest'algebra si ha che, se l'integrale è preso lungo un contorno chiuso sul quale la $f(x)$ è finita e continua, esso è nullo. Ne segue che i due integrali presi da un punto del contorno ad un altro percorrendo i due rami della curva sono uguali. Ma lo saranno anche tutti gli integrali presi fra i due punti seguendo un percorso qualunque interno al contorno poichè lungo queste percorso non vi può essere alcun punto di discontinuità. Infatti le coordinate dell'integrale non possono essere discontinue per valori speciali di b_2, ma, se mai, di b_1 o di b_3. Ma se ciò fosse, conducendo i piani $b_1=K_1$ $b_3=K_2$ essendo K_1 e K_2 questi speciali valori di b_1 e b_3, uno o l'altro od ambedue questi piani taglierebbero uno od ambedue i rami della curva anzidetta in due punti nei quali vi sarebbe discontinuità, il che è contro l'ipotesi fatta sulla natura di $f(x)$.

8. Se ds e dS sono due incrementi infinitesimi di x e $f(x)$ uscenti da due punti corrispondenti, e μ, γ; μ_1, γ_1 gli argomenti relativi ai vettori della superficie dei metri paralleli ad essi, si ha per definizione e dopo aver posto per le Y i valori espressi mediante gli argomenti suddetti:

$$\text{mod. } ds = \frac{db_1}{e^{2a_0\mu}} = \frac{db_2}{\gamma e^{-a_0\mu}} - \frac{db_3}{e^{-a_0\mu}} \qquad \text{mod. } dS = \frac{df_1}{e^{2a_0\mu_1}} = \frac{df_2}{\gamma_1 e^{-a_0\mu_1}} = \frac{df_3}{e^{-a_0\mu_1}}$$

Da queste uguaglianze si ricava:

$$\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds} = f_1'(b_1)\, e^{-2a_0(\mu_1-\mu)} \qquad \frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds} = f_3'(b_3)\, e^{a_0(\mu_1-\mu)}.$$

Moltiplicando la prima uguaglianza per il quadrato della seconda ed estraendo la radice cubica si ottiene: $\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds} = \sqrt[3]{f_1'(b_1)\,.\,f_3'(b_3)^2}$. Ciò vuol dire che il rapporto dei moduli degli incrementi infinitesimi corrispondenti dS e ds tende ad una quantità finita uguale al modulo del vettore del punto-derivata prima e dipendente quindi soltanto da x.

Dalle uguaglianze precedenti si deduce anche $\mu_1-\mu = \frac{1}{3a_0}\,\text{lg.}\,\frac{f_1'(b_1)}{f_3'(b_3)}$. Inoltre $\gamma_1 = \frac{df_2}{df_3}$ $\gamma = \frac{db_2}{db_3}$ donde $\gamma_1-\gamma = \frac{df_2\,.\,db_3 - df_3\,.\,db_2}{df_3\,.\,db_3}$. Ma $df_2 = f_3'(b_3)db_2 + [b_2 f_3''(b_3)+\varphi'(b_3)]db_3$, cosicchè si ha: $\gamma_1-\gamma = \frac{b_2 f_3''(b_3)+\varphi'(b_3)}{f_3'(b_3)} = \frac{\partial f_2}{\partial b_3} : f_3'(b_3)$. Dunque tanto $\mu_1-\mu$ che $\gamma_1-\gamma$ sono quantità finite dipendenti solo dalle coordinate di x e quindi l'angolo della coppia dS-ds, determinato appunto da queste differenze, è costante per tutti gli elementi uscenti da x.

Se diciamo Δ, μ_0, γ_0 il modulo del vettore del punto-derivata prima e gli argomenti che determinano l'angolo della coppia elementare formata dal vettore stesso, e poniamo $f'(x)$ sotto la forma polare, si ha l'espressione $\Delta\left|\pm e^{2a_0\mu_0}u_1 + \gamma_0 e^{-a_0\mu_0}u_2 + e^{-a_0\mu_0}u_3\right|$, per cui dovrà essere $\Delta e^{2a_0\mu_0} = f_1'(b_1)$ $\gamma_0 e^{-a_0\mu_0} = \frac{\partial f_2}{\partial b_3}$ $e^{-a_0\mu_0} = f_3'(b_3)$. Ma $\Delta = \sqrt[3]{f_1'(b_1)\,.\,f_3'(b_3)^2}$; quindi dalla prima uguaglianza si ha $\mu_0 = \frac{1}{3a_0}\,\text{lg.}\,\frac{f_1'(b_1)}{f_3'(b_3)}$ e dalle seconde $\gamma_0 = \frac{\partial f_2}{\partial b_3} : f_3'(b_3)$. Ne segue che $\mu_1-\mu = \mu_0$ e $\gamma_1-\gamma = \gamma_0$, cioè l'angolo della coppia dS-ds è uguale a quello della coppia elementare formata dal vettore del punto-derivata prima.

Anche per quest'algebra, considerando i triangoli infinitesimi formati dagli incrementi corrispondenti, si può parlare di similarità di essi.

V.

Algebra n. 4.

$$\left\|\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_1 \end{matrix}\right\|$$

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	u_3	0
u_3	u_3	0	0

1. Il sistema metrico nel quale svolgeremo la rappresentazione geometrica di quest'algebra è definito dalla superficie $Y_1 = \pm 1$, cioè dalla coppia di piani paralleli al piano coordinato Y_2, Y_3, simmetricamente disposti ri-

spetto a questo alla distanza *uno*. A tale sistema riferiremo il punto P di coordinate $b_1\, b_2\, b_3$ rappresentativo dell' elemento dell' algebra. Chiameremo $Y_1\, Y_2\, Y_3$ le coordinate del punto d'incontro H del vettore di P con un piano della coppia. Stabiliamo sul piano $Y_n\, Y_p$ o piano assintotico un sistema metrico rettilineo (n. 1 della Mem. B) mediante due rette indefinite parallele all' asse Y_p e poste a distanza *uno* da questo, e diciamo γ e ν rispettivamente l' angolo rettilineo ed il modulo retto della proiezione OH_1 di OH sul piano assintotico. È facile vedere che $Y_1 = \pm 1 \qquad Y_2 = \nu \qquad Y_3 = \nu\gamma$.

2. L'elemento generico $x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3$ può porsi quindi sotto la forma polare $b_1[\pm u_1 + \nu \,.\, u_2 + \nu\gamma \,.\, u_3]$ in cui b_1 è il modulo quale risulta dalla definizione generale, o, più opportunamente ponendo $\nu\gamma = \mu$, sotto la forma $b_1[\pm u_1 + \nu \,.\, u_2 + \mu \,.\, u_3]$.

3. Il prodotto di due elementi x e x_1 determinati da b_1, ν, μ e b_1', ν_1, μ_1, dà: $xx_1 = b_1 b_1'[\pm u_1 + (\nu + \nu_1) u_2 + (\mu + \mu_1 + \nu\nu_1) u_3]$. Si vede subito che il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli ed uno degli argomenti è uguale alla somma degli argomenti dei fattori, ma questa proprietà non si verifica per il secondo argomento. Si dimostra facilmente che la proprietà stessa si verifica soltanto per i punti giacenti sulla superficie di due coni opposti di vertice O e di asse Y_p, che vengono tagliati dai piani della coppia secondo parabole la cui proiezione sul piano assintotico ha, nel sistema retto, l'equazione $\nu = 2\gamma$ (F. n. 9). In tal caso il prodotto assume la forma seguente: $b_1 b_1'[\pm u_1 + 2(\gamma + \gamma_1) u_2 + 2(\gamma + \gamma_1)^2 u_3]$.

È evidente che i divisori dello zero hanno i loro punti rappresentativi sul piano assintotico.

Ripetendo l' operazione di moltiplicazione per un numero n di fattori, si ottiene la formola generale $\prod_{r=0}^{n-1} b_1^{(r)}[\pm u_1 + \sum_0^{n-1} \nu_r \,.\, u_2 + (\sum_0^{n-1} \mu_r + \sum_1^{n-1} \nu_r \sum_{s=0}^{r-1} \nu_s) u_3]$ che, per n fattori uguali, dà $x^n = b_1^n \left[\pm u_1 + n\nu \,.\, u_2 + \left(n\mu + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \nu^2\right) u_3\right]$.

4. Se $f(x) = f_1 \,.\, u_1 + f_2 \,.\, u_2 + f_3 \,.\, u_3$ è una funzione della variabile $x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3$ definita in un certo spazio S, le condizioni necessarie e sufficienti perchè essa sia totalmente derivabile sono, secondo il teorema dello Spampinato, le seguenti:

$$\frac{\partial f_1}{\partial b_2} = \frac{\partial f_1}{\partial b_3} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial b_3} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial b_1} = \frac{\partial f_2}{\partial b_2} = \frac{\partial f_3}{\partial b_3} = z_1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial b_1} = \frac{\partial f_3}{\partial b_2} = z_2 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial b_1} = z_3$$

avendo posto $f'(x) = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3$ e supposte le f derivabili rispetto a $b_1 b_2 b_3$. Allora si ha:

$$f(x) = f_1(b_1) u_1 + f_2(b_1 b_2) u_2 + f_3(b_1 b_2 b_3) u_3 = f_1(b_1) u_1 + [b_2 f_1'(b_1) + \varphi(b_1)] u_2 + \left[b_3 f_1'(b_1) + \frac{b_2^2}{2} f_1''(b_1) + b_2 \varphi'(b_1)\right] u_3$$

$$f''(x)=f_1'(b_1)u_1+\frac{\partial f_2}{\partial b_1}u_2+\frac{\partial f_3}{\partial b_1}u_3=f_1'(b_1)u_1+[b_2f_1''(b_1)+\varphi'(b_1)]u_2+$$
$$+\left[b_3f_1''(b_1)+\frac{b_2^2}{2}f_1'''(b_1)+b_2\varphi''(b_1)\right]u_3.$$

5. Sia una serie $f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_rx^r+\ldots\ldots$ in cui $A_r=m_r[\pm u_1+\nu_r u_2+\mu_r u_3]$ (m, ν, μ reali). Applicando le regole della moltiplicazione e la formola per l'elevazione a potenza intera, essa si trasforma in:

$$f(x)=\sum_0^\infty m_rb_1^r\,.\,u_1+\sum_0^\infty m_rb_1^r(\nu_r+r\nu)\,.\,u_2+\sum_0^\infty m_rb_1^r\left[\mu_r+r\nu\nu_r+r\mu+\frac{r(r-1)}{2}\nu^2\right].u_3.$$

Per la sua convergenza debbono essere contemporaneamente convergenti le serie $\sum_0^\infty m_rb_1^r$ $\sum_0^\infty \nu_r m_rb_1^r$ $\sum_0^\infty \mu_r m_rb_1^r$ $\sum_0^\infty r\nu_r m_rb_1^r$ $\sum_0^\infty \frac{r(r-1)}{2}m_rb_1^r$, ma effettivamente basta che lo siano le tre prime se si osserva che le altre si desumono come loro derivate, moltiplicate per i fattori b_1 o $\frac{b_1^2}{2}$. Per la convergenza di $f(x)$ sarà dunque necessario e sufficiente che il modulo b_1 di x sia inferiore al minore degli intervalli di convergenza delle tre serie anzidette, cioè il punto rappresentativo della x dovrà cadere tra due determinati piani paralleli e simmetrici rispetto al piano assintotico.

6. L'integrale definito di una funzione $f(x)$ totalmente derivabile, preso lungo un arco di curva AB sul quale essa si mantenga finita e continua, calcolato col noto procedimento dell'Analisi, si esprime con la formola:

$$\int_A^B f_1(b_1)db_1\,.\,u_1+\int_A^B[f_1(b_1)db_2+f_2(b_1b_2)db_1]\,.\,u_2+\int_A^B[f_1(b_1)db_3+f_2(b_1b_1)db_2+f_3(b_1b_2b_3\,db_1]\,.\,u_3=$$
$$=\int_A^B f_1(b_1)db_1\,.\,u_1+\left[b_2f_1(b_1)+\int\varphi(b_1)db_1\right]_A^B u_2+\left[b_3f_1(b_1)+\frac{b_2^2}{2}f_1'(b_1)+b_2\varphi(b_2)\right]_A^B u_3=$$
$$=\int_A^B f_1(b_1)db_1\,.\,u_1+\int_A^B f_2(b_1b_2)db_1\,.\,u_2+\int_A^B f_3(b_1b_2b_3)db_1\,.\,u_3.$$

Se l'integrale è preso lungo un contorno chiuso sul quale la $f(x)$ è finita e continua, esso è nullo. Ne segue che i due integrali, presi da un punto del contorno ad un altro percorrendo i due rami della curva, sono uguali. E a questi saranno uguali anche tutti gli integrali presi fra i due punti seguendo un percorso qualunque interno al contorno, poichè lungo questo percorso non vi può essere alcun punto di discontinuità. La dimostrazione di questo asserto è del tutto analoga a quella seguìta per l'algebra precedente.

7. Se ds e dS sono due incrementi infinitesimi di x e di $f(x)$ uscenti da due punti corrispondenti, e ν, μ ν_1, μ_1 gli argomenti relativi ai vettori condotti da O parallelamente ad essi, si ha per definizione e dopo aver posto per le Y i valori espressi mediante questi argomenti:

$$\text{mod. } ds = \frac{db_1}{1} = \frac{db_2}{\nu} = \frac{db_3}{\mu} \qquad \text{mod. } dS = \frac{df_1}{1} = \frac{df_2}{\nu_1} = \frac{df_3}{\mu_1}$$

da cui:

$$\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds} = \frac{df_1}{db_1} = \frac{\nu}{\nu_1}\frac{df_2}{db_2} = \frac{\mu}{\mu_1}\frac{df_3}{db_3}.$$

Si vede subito che il rapporto dei moduli di due incrementi infinitesimi corrispondenti tende a $f_1'(b_1)$, cioè al modulo del vettore del punto rappresentativo di $f'(x)$. Dalle stesse uguaglianze si ha inoltre, tenendo conto delle condizioni di derivabilità di $f(x)$:

$$\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\dfrac{df_2}{db_2}}{f_1'(b_1)} = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial b_1}\dfrac{1}{\nu} + f_1'(b_1)}{f_1'(b_1)} \qquad \text{da cui} \qquad \nu_1 - \nu = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial b_1}}{f_1'(b_1)}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{\dfrac{df_3}{db_3}}{f_1'(b_1)} = \frac{\dfrac{\partial f_3}{\partial b_1}\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{\partial f_2}{\partial b_1}\dfrac{\nu}{\mu} + f_1'(b_1)}{f_1'(b_1)} \qquad \text{da cui} \qquad \mu_1 - \mu = \frac{\dfrac{\partial f_3}{\partial b_1}}{f_1'(b_1)} + \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial b_1}}{f_1'(b_1)}\nu$$

Ponendo $f'(x)$ sotto la forma polare si ha $f'(x) = f_1'(b_1)[\pm u_1 + \nu_0 u_2 + \mu_0 u_3]$, essendo $\nu_0 = \dfrac{\partial f_2}{\partial b_1} : f_1'(b_1)$ $\mu_0 = \dfrac{\partial f_3}{\partial b_1} : f_1'(b_1)$ gli argomenti che determinano la direzione del vettore del punto-derivata prima di $f(x)$. Paragonando questi valori con quelli delle formole antecedenti, si ha facilmente: $\nu_0 = \nu_1 - \nu$ e $\mu_0 = \mu_1 - \mu - \nu(\nu_1 - \nu)$. Si ha dunque che le quantità al secondo membro sono uguali agli argomenti del vettore del punto rappresentativo di $f'(x)$ e quindi indipendenti dalla direzione degli incrementi uscenti da x.

Qui cade a proposito di rilevare l'opportunità per la rappresentazione geometrica della presente algebra di definire l'angolo di una coppia di vettori in modo alquanto differente da quello seguìto per le algebre precedenti. Per queste la misura di un tale angolo era data dalla differenza degli argomenti. Ma, nel caso presente, se si assumessero a tale scopo le quantità $\nu_1 - \nu$ e $\mu_1 - \mu$, quest'ultima, dipendendo da ν, porterebbe alla conseguenza che l'angolo della coppia ds-dS non sarebbe più indipendente dalla direzione di ds. Da ciò la convenienza di definire l'angolo di una coppia di vettori i cui argomenti siano rispettivamente ν, μ e ν_1, μ_1 mediante le quantità ν_0 e μ_0. In questo modo si può parlare di rappresentazione conforme anche per l'al-

gebra in esame, con gli stessi risultati esposti per le rappresentazioni conformi delle algebre precedenti.

VI.

Algebra n. 5.

$$\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{Vmatrix}$$

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	0	0
u_3	u_3	0	0

1. Il sistema metrico nel quale svolgeremo quest' algebra è, come per la precedente, quello definito dalla coppia di piani $Y_1 = \pm 1$.

2. L' elemento corrente $x = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$ può scriversi nella forma polare $b_1[\pm u_1 + \nu.u_2 + \nu\gamma.u_3]$, ovvero, ponendo $\nu\gamma = \mu$, $b_1[\pm u_1 + \nu \,.\, u_2 + \mu \,.\, u_3]$. L' angolo rettilineo γ e il modulo retto ν servono a determinare la direzione del vettore del punto rappresentativo di x e a definire la misura della coppia elementare formata dal vettore stesso. Per semplicità converrà però assumere a questo scopo le quantità ν e μ Dati allora due vettori determinati da ν, μ e da $\nu_1 \,.\, \mu_1$, prenderemo come misura dell'angolo della coppia da essi formata le quantità $\nu_1 - \nu$ e $\mu_1 - \mu$, e indicheremo come al solito col simbolo $(\nu_1 - \nu, \mu_1 - \mu)$ quest' angolo.

3. Il prodotto di due elementi x e x_1 determinati da $b_1\,\nu\,\mu$ e $b_1'\,\nu_1\,\mu_1$, darà la formola $xx_1 = b_1b_1'[\pm u_1 + (\nu + \nu_1)u_2 + (\mu + \mu_1)u_3]$, dalla quale risulta che il modulo del prodotto di due elementi è uguale al prodotto dei moduli e i suoi argomenti sono uguali alla somma degli argomenti dei fattori. Per la potenza n.ma di x si ha in conseguenza la formola $x^n = b_1^n[\pm u_1 + n\nu.u_2 + n\mu\, u_3]$.

4. Se $f(x) = f_1.u_1 + f_2.u_2 + f_3.u_3$ è una funzione della variabile $x = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$ definita in un certo spazio S, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè essa sia totalmente derivabile sono, per il teorema dello Spampinato, le seguenti:

$$\frac{\partial f_1}{\partial b_2} = \frac{\partial f_1}{\partial b_3} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial b_3} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial b_2} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial b_1} = \frac{\partial f_2}{\partial b_2} = \frac{\partial f_3}{\partial b_3} = z_1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial b_1} = z_2 \quad \frac{\partial f_3}{\partial b_1} = z_3$$

essendo $f'(x) = z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3$ e supposte le f derivabili rispetto a $b_1\, b_2\, b_3$.

Allora si ha:

$$f(x) = f_1(b_1)u_1 + f_2(b_1b_2)u_2 + f_3(b_1b_3)u_3 = f_1(b_1)u_1 + [b_2f_1'(b_1) + \varphi(b_1)]u_2 + [b_3f_1'(b_1) + \psi(b_1)]u_3$$

$$f'(x) = f_1'(b_1)u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial b_1}u_2 + \frac{\partial f_3}{\partial b_1}u_3 = f_1'(b_1)u_1 + [b_2f_1''(b_1) + \varphi'(b_1)]u_2 + [b_3f_1''(b_1) + \psi'(b_1)]u_3$$

5. Sia una serie $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_r x^r + \ldots$ di $x = b_1[\pm u_1 + \nu . u_2 + \mu . u_3]$ dove $A_r = m_r[\pm u_1 + \nu_r u_2 + \mu_r u_3]$. Applicando le regole della moltiplicazione e la formola per l'innalzamento a potenza intera, alla fine si avrà:

$$f(x) = \sum_0^\infty m_r b_1^r . u_1 + \sum_0^\infty (\nu_r + r\nu) m_r b_1^r . u_2 + \sum_0^\infty (\mu_r + r\mu) m_r b_1^r . u_3 .$$

Affinchè tale serie sia convergente è necessario e basta che siano convergenti contemporaneamente le seguenti serie:

$$\sum_0^\infty m_r b_1^r \qquad \sum_0^\infty \nu_r m_r b_1^r \qquad \sum_0^\infty \mu_r m_r b_1^r$$

poichè la serie $\sum_0^\infty r m_r b_1^r$, essendo la derivata della prima di esse moltiplicata per b_1, sarà convergente. Dunque la serie data sarà convergente per tutti i valori del modulo b_1 di x i quali siano inferiori al minore degli intervalli di convergenza delle tre serie, cioè il punto rappresentativo di x dovrà cadere tra due piani paralleli e simmetrici rispetto al piano assintotico e posti ad una distanza da questo uguale all'intervallo minore anzidetto. Per questi valori di x saranno anche convergenti tutte le derivate di $f(x)$.

6. L'integrale definito di una funzione $f(x)$ totalmente derivabile, preso lungo un arco di curva AB sul quale essa sia finita e continua, seguendo il noto procedimento, si esprime con la formola:

$$\int_A^B f_1(b_1) db_1 . u_1 + \int_A^B [f_1(b_1) db_2 + f_2(b_1 b_2) db_1] . u_2 + \int_A^B [f_1(b_1) db_3 + f_3(b_1 b_3) db_1] . u_3 =$$

$$= \int_A^B f_1(b_1) db_1 . u_1 + \left[b_2 f_1(b_1) + \int \varphi(b_1) db_1 \right]_A^B u_2 + \left[b_3 f_1(b_1) + \int \psi\, b_1 db_1 \right]_A^B u_3 =$$

$$= \int_A^B f_1(b_1) db_1 . u_1 + \int_A^B f_2(b_1 b_2) db_1 . u_2 + \int_A^B f_3(b_1 b_3) db_1 . u_3 .$$

Per le considerazioni su questo integrale rimandiamo per brevità a quelle analoghe fatte per l'algebra precedente.

7. Se ds e dS sono due incrementi infinitesimi di x e $f(x)$ uscenti da due punti corrispondenti, e ν, μ e ν_1, μ_1 gli argomenti relativi ai vettori condotti da O parallelamente ad essi, si ha, come per l'algebra precedente:

$$\frac{\text{mod. } dS}{\text{mod. } ds} = \frac{df_1}{db_1} = \frac{df_2}{db_2} \frac{\nu}{\nu_1} = \frac{df_3}{db_3} \frac{\mu}{\mu_1} .$$

Anche per quest'algebra il rapporto dei moduli dei due incrementi tende a $f_1'(b_1)$, cioè al modulo del vettore del punto rappresentativo di $f'(x)$. Dalle relazioni precedenti si ottiene anche:

$$\nu_2 - \nu = \frac{\partial f_2}{\partial b_1} : f_1'(b_1) \qquad \mu_1 - \mu = \frac{\partial f_3}{\partial b_1} : f_1'(b_1).$$

Queste differenze sono dunque indipendenti dalla direzione dell'incremento ds. Se, come abbiamo in generale convenuto, le assumiamo come misure dell'angolo della coppia ds-dS, possiamo concludere che questo angolo è costante per tutti gli elementi uscenti dai punti x e $f(x)$ corrispondenti.

Ponendo $f'(x)=f_1'(b_1)u_1+\frac{\partial f_2}{\partial b_1}u_2+\frac{\partial f_3}{\partial b_1}u_3$ sotto la forma polare si ha $f_1'(b_1)[\pm u_1+\nu_0 u_2+\mu_0 u_3]$ essendo ν_0 e μ_0 gli argomenti relativi al vettore del punto rappresentativo di $f'(x)$. Paragonando le due forme si ha $\nu_0=\frac{\partial f_2}{\partial b_1} : f_1'(b_1)$ $\mu_0=\frac{\partial f_3}{\partial b_1} : f_1'(b_1)$. Ma questi sono i valori già trovati per $\nu_1-\nu$ e $\mu_1-\mu$; quindi $\nu_0=\nu_1-\nu$ e $\mu_0=\mu_1-\mu$, il che vuol dire che l'angolo formato dalla coppia dS-ds è uguale all'angolo della coppia elementare formata dal vettore del punto rappresentativo di $f'(x)$.

Anche per quest'algebra si può dunque parlare di rappresentazione conforme.

Esponiamo qui appresso una proprietà generale riguardante la rappresentazione geometrica delle funzioni totalmente derivabili nelle algebre precedentemente trattate.

Si sa dall'Analisi che, data una corrispondenza di punti nello spazio S_3 reale euclideo definita dalle relazioni

$$\xi = f_1(b_1b_2b_3) \qquad \mu = f_2(b_1b_2b_3) \qquad \nu = f_3(b_1b_2b_3)$$

tale che:

1° Il punto $(\xi\,\mu\,\nu)$ si muova in uno spazio limitato E quando il punto $(b_1b_2b_3)$ si muova in un altro spazio limitato E'.

2° I punti di questi due spazi si corrispondano in maniera univoca.

3° Le funzioni $f_1f_2f_3$ siano continue e ammettano delle derivate parziali continue in E' e che ivi lo Jacobiano $\frac{D(f_1f_2f_3)}{D(b_1b_2b_3)}$ sia differente da zero,

il rapporto dei volumi dei triedri infinitesimi di vertici $(\xi\,\mu\,\nu)$ e $(b_1b_2b_3)$ corrispondenti tende al valore dello Jacobiano suddetto.

Supponiamo ora che $f_1f_2f_3$ siano le coordinate di una qualunque delle funzioni f della variabile $b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3$ totalmente derivabili precedentemente studiate. Per il teorema dello Sampinato si ha che la trasposta della matrice della derivata prima di $f(x)$ è uguale alla matrice jacobiana

delle funzioni $f_1 f_2 f_3$. Poichè poi il determinante di una matrice ha lo stesso valore di quello della sua trasposta, si ha che il determinante della matrice di $f'(x)$ è uguale al valore dello Jacobiano $\frac{D(f_1 f_2 f_3)}{D(b_1 b_2 b_3)}$. Ma il determinante della matrice di $f'(x)$ è per definizione uguale al cubo del modulo del vettore del punto rappresentativo della derivata stessa e lo Jacobiano suddetto è il valore cui tende il rapporto di due tetraedri infinitesimi corrispondenti con i vertici in $(b_1 b_2 b_3)$ e $(f_1 f_2 f_3)$, quindi:

Il rapporto dei volumi di due tetraedri infinitesimi corrispondenti nella rappresentazione geometrica delle algebre precedentemente trattate tende al cubo del modulo del vettore del punto rappresentativo della derivata prima di f(x).

Elementi della teoria delle coniche e delle polarità piane biduali nella 1ª rappresentazione complessa

(Adunanza del dì 5 giugno 1948)

Nota della dott. **Anna Fiore** *presentata dal socio* **N. Spampinato**

Sunto. — Assegnata la rappresentazione complessa del piano biduale rigato si studiano le proprietà fondamentali di una polarità biduale e di una conica biduale.

1. *Rappresentazione del piano biduale rigato.*

È nota la rappresentazione complessa del piano biduale punteggiato in una congruenza di rette dell' S_3 complesso, proiettivo. [1]) Allo scopo di studiare quelle corrispondenze fra il piano biduale punteggiato e il piano biduale rigato, che generalizzano le polarità piane nel campo complesso, corrispondenze che chiameremo polarità piane biduali, occorre introdurre, accanto alla 1ª rappresentazione del piano biduale punteggiato, la 1ª rappresentazione del piano biduale rigato. A tal fine alla retta biduale r del piano biduale di equazione

$$\rho_1 \gamma_4 + \rho_2 \gamma_3 + \rho_3 \gamma_3 = 0, \qquad (1)$$

[dove con $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ indichiamo le coordinate della retta r, le due terne essendo entrambe formate di numeri biduali a caratteristica massima, definite

---

[1]) N. Spampinato, *La varietà W_4^6 dell' S_8 complesso riemanniana del piano biduale.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, s. IV, vol. VIII, n. 3.

a meno di un fattore biduale non nullo nè divisore dello zero], facciamo corrispondere, nell' S_5 complesso ambiente della congruenza (S_1), l' S_3 ambiente della congruenza monoassiale le cui rette rappresentano i punti biduali appartenenti alla retta biduale r [1]). Variando la retta biduale nel piano biduale, il suo S_3 immagine varierà nell' S_5 ambiente descrivendo un insieme di S_3 che ci dà la figura duale della congruenza di rette (S_1). Tale figura la incheremo con (S_3) e la chiameremo anche una congruenza inviluppo. Questa congruenza gode della proprietà: *Ad un iperpiano generico dell' S_5 appartiene un solo S_3 della congruenza.* La congruenza inviluppo (S_3) si dice anche di classe 1 dualmente al fatto che l'ordine della congruenza (S_1) è 1.

2. *Teoria della polarità nell' S_5 proiettivo biduale.*

Studiando la teoria della polarità nell' S_5 proiettivo biduale si verifica, come nel campo complesso, che la polarità è una *reciprocità involutoria.*

La polarità biduale di Φ di equazioni:

$$\begin{cases} \rho_1 = \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \alpha_{13}\gamma_3 \\ \rho_2 = \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \alpha_{23}\gamma_3 \\ \rho_3 = \alpha_{31}\gamma_1 + \alpha_{32}\gamma_2 + \alpha_{33}\gamma_3, \end{cases} \tag{2}$$

(ρ_i, α_{ij}, γ_i con $i, j = 1, 2, 3$ essendo numeri biduali e le α_{ij} verificano la relazione $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}$ e posto $\rho_i = \rho'_i u + \rho''_i \varepsilon$, $\gamma_i = x\,i\,u + x\,i\,\varepsilon$, $\alpha_{ij} = \alpha'_{ij} u + \alpha''_{ij}\varepsilon$ con u ed ε unità dell' algebra dei numeri biduali), determina nell' S_5 complesso una polarità φ, quella rispondente alla matrice simmetrica, determinata dalle α_{ij},

$$\begin{Vmatrix} \alpha''_{11} & \alpha'_{11} & \alpha''_{12} & \alpha'_{12} & \alpha''_{13} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{11} & 0 & \alpha'_{12} & 0 & \alpha'_{13} & 0 \\ \alpha''_{21} & \alpha'_{21} & \alpha''_{22} & \alpha'_{22} & \alpha''_{23} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{21} & 0 & \alpha'_{22} & 0 & \alpha'_{23} & 0 \\ \alpha''_{31} & \alpha'_{31} & \alpha''_{32} & \alpha'_{32} & \alpha''_{33} & \alpha'_{33} \\ \alpha'_{31} & 0 & \alpha'_{32} & 0 & \alpha'_{33} & 0 \end{Vmatrix} \tag{3}$$

La polarità φ nell' S_5 complesso rappresenta la polarità biduale fissata, poichè si dimostra che alla coppia punto-retta del piano biduale, omologhi nella polarità biduale Φ di equazione (2), corrisponde, nella rappresentazione una coppia retta-S_3 delle due congruenze (S_1) e (S_3) sopra considerate, che si corrispondono nella polarità φ.

Si noti che se i coefficienti del sistema (2) si moltiplicano per un fattore biduale non nullo nè divisore dello zero, mentre la polarità biduale Φ non

---

[1]) È noto che un S_1 proiettivo biduale è rappresentato nella sua 1ª rappresentazione da una congruenza monoassiale dell' S_3 proiettivo complesso. [N. Spampinato. *Lezioni di Geometria Superiore* Vol. IV, § 10, n. 4].

cambia, la polarità φ dell'S_3 complesso di matrice (3) varia in un sistema lineare ∞^1, perchè gli elementi della matrice vengono a dipendere linearmente da due parametri complessi omogenei, sicchè ad una polarità biduale corrisponde un sistema lineare ∞^1 di polarità in S_3, che subordina fra le due congruenze (S_1) e (S_3) una corrispondenza che rappresenta la polarità biduale data.

3. — *Coniche biduali.*

Come nel piano complesso anche nel piano biduale una conica biduale può definirsi in due modi: come luogo di punti biduali sodisfacenti ad una equazione biduale di 2° grado nelle tre variabili j_1, j_2, j_3 e come luogo di punti ciascuno dei quali appartiene alla sua retta biduale polare in una data polarità.

La rappresentazione complessa di una conica biduale nell'S_3 è legata perciò alla rappresentazione complessa di una polarità biduale.

Si dimostra precisamente che i punti di una conica biduale sono rappresentati in ∞^2 rette della congruenza (S_1) che riempiono la V_3^4, base di un fascio d'iperquadriche di S_3 e precisamente del fascio d'iperquadriche determinato dal sistema lineare ∞^1 di polarità di cui sopra. Tale fascio d'iperquadriche è determinato da un S_2-cono quadrico avente per vertice il piano S_2 (a cui si appoggiano tutte le rette della congruenza (S_1)) e da un'iperquadrica di un certo tipo particolare. La V_3^4 considerata, contiene ∞^1 piani ciascuno appoggiato all'S_2 in un punto di una conica.

Indagini sulla magnesia elettrofusa

Nota dei dott. **L. Vighi** *e* **R. Sersale**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 5 giugno 1948)

Sunto. — È stata studiata la composizione mineralogica di quattro campioni di magnesia elettrofusa ottenuta a partire dalle magnesiti delle formazioni di Castiglioncello-Campolecciano. I costituenti accessori che accompagnano il periclasio sono risultati: il silicato bicalcico nelle forme α e β, l'äkermanite, nonchè piccole quantità di magnetite. La maggior parte del ferro trovasi come FeO disciolto in soluzione solida nel periclasio.

La magnesia elettrofusa è un materiale refrattario di alto valore: per la stabilità di volume praticamente completa, per l'altissima refrattarietà (MgO: p. f. 2800°), per l'alta resistenza elettrica alle elevate temperature,

per l'ottima conduttività termica, ed infine per la buona resistenza agli attacchi chimici in genere. Nonostante questo assieme di pregi, però, il suo alto costo di produzione ne relega oggi l'impiego a scopi specialissimi: supporti di resistenze riscaldanti, rivestimenti per forni ad induzione, oggetti vari per uso di laboratorio (tubi, crogioli, ecc,).

I primi esperimenti di fusione della magnesia al forno elettrico datano dalla fine del secolo passato (Moissan), ma all'inizio della seconda guerra mondiale si aveva notizia della produzione su scala industriale della magnesia elettrofusa solo per due piccoli impianti: uno in Norvegia, l'altro negli Stati Uniti (Exolon Comp., Blasdell — N. Y. [1]). La produzione russa e quella tedesca erano da considerarsi in fase sperimentale. [2]).

L'alto costo della magnesia in questione non è dovuto a particolari difficoltà tecniche, ma, come è ovvio stante l'alto punto di fusione, all'ingente consumo di energia elettrica. D'altra parte è necessario di contenere al massimo l'ammontare delle impurezze la cui presenza nel prodotto finito abbassa la qualità e quindi il valore commerciale di esso.

La magnesia elettrofusa sarebbe un ottimo materiale per la confezione (come «grog») di refrattari per uso di acciaieria e non è improbabile che nel futuro essa venga usata. Infatti, i progressi che si potranno realizzare nella costruzione dei forni potranno spostare i termini economici del problema della produzione della magnesia elettrofusa. L'alto costo di essa potrebbe cioè esser bilanciato dalla sua maggiore durata in condizioni di particolare tormento termico e chimico.

Sulla costituzione mineralogica delle masse magnesiache della pratica: sia magnesia sinterizzata sia refrattari magnesiaci ottenuti con l'usuale diagramma di lavorazione, esiste nella letteratura un'ampia e dettagliata documentazione [3]).

Sostanzialmente è stato posto in evidenza che i granuli di periclasio appaiono separati da una matrice nella quale, a secondo dell'ammontare e

---

[1]) Comber A. W., *Magnesite as a refractory*, Londra. Griffin, 1937.

[2]) Litinsky L., *L'èvolution des briques rèfractaires a base de magnèsie*, 15° Congrès de Chimie industrielle, Chimie et Industrie, Numero spècial, 1935, p. 1153. Durante la guerra, e sempre per specialissime destinazioni, si è prodotto in Germania della magnesia elettrofusa. (*The electrical and technical ceramic industry of Germany*. F.I.A.T. Final report, N.° 617).

[3]) Andersen O., *Magnesia refractories in basic open-hearth steel-furnace*. J. Am. Cer. Soc. *17*; 221; (1934). — Konopicky K., *Sinter-magnesit*, Ber. Deutsch. Keram. Gesell. *18*; 97; 419; (1937). — Tavasci B., *Struttura di refrattari magnesiaci*. La Chimica e l'Industria, *23*; 355; (1941). — Letort e Halm L., *Contribution a l'ètude de la cristallisation de la magnèsie sous l'effet de temperatures croissantes*. Chimie et Industrie, 58; 537; (1947). — Konopicky K. e Troyer F., *Der Chemische und mineralogische Aufbau der feuerfesten Magnesitmassen*, Radex, Rundschau, Heft 1/2; p. 3; (1947).

della natura delle impurezze, sono stati osservati: la forsterite, la monticellite, il silicato bicalcico β: più raramente: alluminati e ferriti di calcio, spinello.

Il ferro lo si ritrova sotto forma di segregazione di ferrito di magnesio all'interno dei cristalli di periclasio, segregazioni originatesi per rottura, a seguito del raffreddamento della soluzione solida: periclasio-ferrito, stabile solo alle alte temperature.

Sulla natura mineralogica delle impurezze che accompagnano il periclasio nel materiale fuso ricavato a partire dalle magnesiti naturali, si trovano notizie nei lavori di H. E. White [1]) e di Burrows Moore [2]); i quali hanno considerato soltanto delle magnesiti molto pure e, particolarmente, povere di ferro, ragione per cui mentre è stato possibile al White di individuare: forsterite, monticellite, äkermanite e spinello, nessun elemento ci vien fornito onde poter prevedere il comportamento del ferro qualora al posto di magnesiti appositamente scelte si destinassero all'elettrofusione delle magnesiti di minore purezza.

È per questo che avendo avuto fra mano quattro campioni di materiale ottenuto per fusione al forno ad arco (diretto) di magnesia ricavata da magnesiti toscane, abbiamo voluto esaminarne la costituzione mineralogica, con particolare interesse per quel che riguarda la stato del ferro che in tali magnesiti è costantemente presente.

La composizione delle magnesiti di partenza non la conosciamo. Sappiamo soltanto che nelle prove in questione fu adoperata della magnesite proveniente dalle formazioni incassate fra le rocce verdi (serpentine) di Castiglioncello, Campolecciano (Livorno).

Si tratta, come è noto, di magnesite contenente discrete quantità di impurezze: particolarmente: silice e calce.

Esame ottico

L'esame ottico dei quattro campioni è stato eseguito in sezione sottile, su polvere, nonchè in sezione lucida, servendosi per queste ultime indagini, del microscopio metallografico.

Descriviamo separatamente i risultati ottenuti perchè i quattro campioni appaiono leggermente diversi.

Campione I — *Osservazione della sezione lucida* — (v. fig. 1 della tav. II)

Per quanto l'osservazione calcografica dia pochi elementi diagnostici circa la composizione mineralogica del campione, costituito quasi esclusivamente da minerali trasparenti, tuttavia si è potuto stabilire che:

---

[1]) White H. E., *Elettrically fused magnesia*, J. Am. Cer. Soc., *21*; 216; (1938).

[2]) Burrows Moore, *Fused Magnesia*, Trans. Cer. Soc., *39*; 41; (1940).

a) siamo in presenza di almeno tre minerali, due dei quali trasparenti; di questi, uno è grandemente predominante sull'altro; insieme essi costituiscono la quasi totalità del campione nel quale si notano solo tracce del terzo minerale, che è opaco;

b) il minerale predominante, che è stato poi determinato come periclasio e che costituisce oltre il 90 % della sezione, presenta basso potere riflettente, assenza di riflessi interni ad inattaccabilità ai normali reagenti usati in calcografia. È presente in cristalli ora a contorno rotondeggiante, ora a contorno poligonale irregolare; i cristalli hanno dimensioni molto variabili da punto a punto della sezione, ma non superano mai 0,5 mm.

La sezione mostra un'altra irregolarità oltre quella notata nella tessitura; infatti in talune zone il periclasio ha preso ottima lucidatura, mentre in altre è reso opaco dalla presenza di numerosi piccoli vacuoli di dimensioni di qualche millesimo di mm;

c) il secondo minerale presente, che è stato determinato come silicato bicalcico, costituisce circa il 10 % della sezione. La percentuale di esso è molto diversa da punto a punto della superficie osservata; infatti questa in alcuni punti è quasi esclusivamente costituita da periclasio, in altri invece il silicato bicalcico raggiunge un tenore del 20 %. Questo minerale è presente sotto forma di venule che bordano i cristalli di periclasio, o sotto forma di inclusioni pecilitiche negli stessi cristalli. La uniformità del potere riflettente delle venule che orlano il periclasio e degli inclusi in esso, unita allo stesso comportamento agli acidi, fa pensare che le venule e gli inclusi siano costituite da un unico minerale;

d) rarissime, nella sezione, si notano piccole aree ($\sim$ 0,02 mm.) ad alto potere riflettente, costituite da un minerale opaco. Quantunque le reazioni effettuate per la determinazione di questo minerale siano disturbate, data la piccolezza dei granuli, dai minerali adiacenti, pure il comportamento ai reagenti, la isotropia, il colore ed il potere riflettente hanno portato a determinare questo minerale, con sicurezza, quale magnetite.

La percentuale della magnetite è molto scarsa. In effetti, poichè in tutta la sezione, che misura circa 600 mm^2, sono presenti solo sei aree a magnetite, con diametro medio di circa 0,02 mm, si può agevolmente valutare che la percentuale di magnetite si aggira intorno al 0,01 %.

Per quanto riguarda la percentuale degli altri minerali presenti, questa non è stata misurata dato che da punto a punto la sezione si presenta con caratteristiche sensibilmente diverse. Si notano infatti:

a) zone costituite esclusivamente da periclasio, con cristalli di dimensioni variabili da 0,1 a 0,5 mm;

b) zone in cui i cristalli di periclasio, delle dimensioni ora dette, sono contornati da venule sottili di silicato bicalcico;

c) zone in cui i cristalli di periclasio sono contornati da venule

sottili di silicato bicalcico e sono ricchi di inclusi, probabilmente costituiti dallo stesso minerale;

d) zone ristrette in cui lo spessore delle venule che orlano il periclasio è notevole, così che il silicato bicalcico raggiunge localmente forti percentuali nella sezione.

Osservazione della sezione sottile e dei granelli

Anche la sezione sottile (v. fig. 1 e 2 della tav. I) mostra una forte variazione della tessitura e delle percentuali mineralogiche da punto a punto. Tuttavia una gran parte della sezione studiata è risultata costituita da cristalli globuliformi di periclasio, contornati da venule di silicato bicalcico; nelle zone così fatte, la osservazione delle tracce di sfaldatura che passano indisturbate attraverso due o più granuli di periclasio, e la

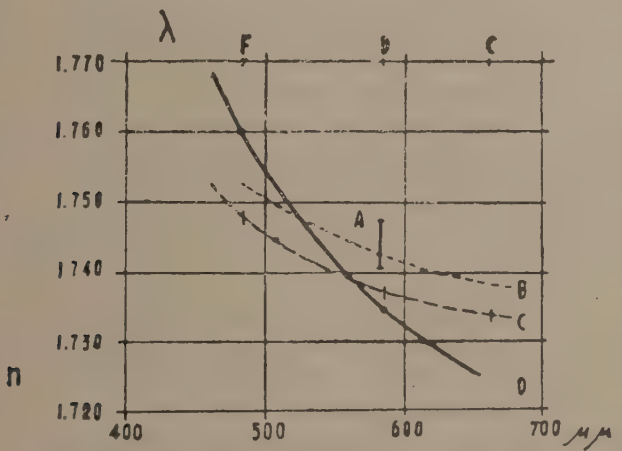


Fig. 1. — Dispersione degli indici di rifrazione del periclasio naturale (A); del periclasio dei campioni in esame (B); dell' MgO puro (C); dell' ioduro di metilene (D).

quasi contemporanea estinzione delle venule di silicato bicalcico in aree più o meno grandi, mostrano che siamo in presenza di grandi individui di periclasio nei quali sono concresciuti cristalli scheletriformi di silicato bicalcico. Accanto a questa tessitura, che è presente in quasi tutta la sezione, si notano piccole aree costituite da grossi cristalli di periclasio limpidi e senza nè inclusi nè venule di silicato bicalcico.

L'osservazione della sezione sottile e dei granelli ha permesso di riconoscere i seguenti minerali:

a) *Periclasio* — È caratterizzato dalla sua perfetta isotropia, dalla facilissima sfaldatura cubica e dall'indice di rifrazione che vale $n_D = 1{,}742$.

L'indice di rifrazione dell'MgO puro (v. fig. 1) vale $n_D = 1{,}7366$ [1]). Il periclasio naturale ha un $n_D = 1{,}734 \div 1{,}737$ e contiene in miscela isomorfa notevole quantità di FeO; così per esempio il periclasio dei blocchi rigettati del Somma può contenere fino a 8,5 % di FeO. Dagli studi di Bowen e Schairer [2]), MgO ed FeO formano una serie isomorfa completa, nella quale n_D varia da 1,736 per MgO fino a 2,32 per FeO (valore estrapolato; questi dati sono stati determinati da Sommerfeldt) [3])

Osservando la linea di Becke in un preparato del periclasio dei campioni da noi esaminati, ridotto in polvere ed immerso nello ioduro di metilene (che ha: $n_D = 1{,}734$, $n_C = 1{,}724$, $n_F = 1{,}760$), si può constatare che per la luce di lunghezza di onda superiore a 750 μμ, alzando il tubo del microscopio l'alone di Becke si sposta verso l'interno del minerale e questo prende una colorazione giallo-oro; abbassando il tubo del microscopio l'alone di Becke per la luce di lunghezza d'onda minore di 500 μμ si sposta verso l'interno del minerale e questo prende una colorazione indaco chiaro.

Tenuto conto della dispersione che presenta lo ioduro di metilene, si ricava che l'indice di rifrazione del minerale deve essere pari a 1,747 per una lunghezza d'onda uguale a 525 μμ.

D'altro canto è conosciuta la dispersione dell' MgO puro (M. Haasen, op. cit.) che è data dai valori $n_C = 1{,}7335$; $n_F = 1{,}7475$; è lecito ammettere per il periclasio contenente FeO, un'andamento analogo della dispersione; ciò ci porta ad ammettere per il periclasio in esame un'indice di rifrazione pari a $n_D = 1{,}742$; ciò che corrisponde ad un contenuto di FeO di circa $2 \div 3$ %.

L'osservazione mostra però che l'n_D del periclasio prelevato da vari punti dello stesso campione presenta delle lievi variazioni (che raggiungono al massimo un paio di unità nella terza cifra decimale); ciò porta quindi ad ammettere che il tenore in FeO è variabile da punto a punto, per quanto tale variazione resti contenuta in limiti ristretti.

b) *Silicato bicalcico.* S'incontrano serie difficoltà nella determinazione di questo minerale. In effetti esso si presenta in genere sotto forma di venule sottili e di piccoli inclusi: là dove le venule sono più spesse, geminazioni e lamelle incrociate disturbano fortemente l'osservazione.

Con sicurezza si può tuttavia determinare che il minerale:

— è incolore, trasparente, anisotropo;

— raramente presenta lamelle di geminazione;

— mostra facile sfaldatura, come si nota specialmente nell'osservazione in granelli;

— è fortemente attaccato da HCl 1 : 1;

---

[1]) Haasen M., Zeit. Kryst., *14*; 509; (1927).

[2]) Bowen N. L. e Schairer J. F., Journ. Am. Sci. (5); *29*; 194; (1935).

[3]) Sommerfeldt., Zentr. Blatt. Miner., p. 213; (1907).

— mostra una birifragenza massima che si può stimare oscilli intorno a 0,020;

— ha un indice di rifrazione secondo γ che vale $n_g = 1{,}733$ mentre n_p è sensibilmente minore e vale circa 1,710;

— presenta un angolo degli assi ottici positivo e grande ($60° \div 70°$);

— si sfalda secondo solidi di sfaldatura che talvolta mostrano estinzione retta; spesso estinzione variabile (che per lo più si aggira intorno ai 18°).

A prescindere dal valore degli angoli di estinzione sui solidi di sfaldatura, due sono i minerali che, date le condizioni di formazione dei campioni esaminati, rispondono ai dati ottici su riportati e precisamente:

$\alpha - Ca_2\ SiO_4$ = larnite (monoclina)
$\beta - Ca_2\ SiO_4$ = shannonite (ortorombica).

La piccolezza dei cristalli del minerale esaminato non permette una misura delle caratteristiche cristallografiche; tuttavia, se si tiene conto che la $\beta - Ca_2\ SiO_4$, ortorombica, potrebbe mostrare angoli di estinzione intorno ai 20° soltanto in sezioni prossime a quelle normali ad un asse ottico, mentre i solidi di sfaldatura che hanno dato tale angolo di estinzione si mostrano fortemente birifrangenti, si deve ammettere, data la presenza di alcuni solidi di sfaldatura che mostrano estinzione retta, che siamo in presenza di ambedue le forme, α e β, del silicato bicalcico. Non si può però nemmeno approssimativamente stimare la percentuale relativa delle due forme.

Campione II — *Osservazione della sezione lucida*

La sezione lucida si presenta molto più uniforme che non quella del campione I. La tessitura predominante è costituita da cristalli di periclasio (di dimensioni da $0{,}2 \div 0{,}6$ mm) a sezione grossolanamente rotondeggiante o a sezione poligonale più o meno regolare, tra i quali si notano venule sottili di silicato bicalcico. Più o meno numerosi, inclusi nel periclasio, si notano cristalli a sezione rotondeggiante di dimensioni molto esigue (intorno a 0,05 mm); di questi inclusi, una parte si possono ritenere costituiti da silicato bicalcico, confrontando il loro aspetto ed il potere riflettente con quello delle venule che bordano il periclasio; una parte invece si debbono ritenere costituiti da altro minerale, dato che presentano un potere riflettente superiore sia a quello del periclasio che a quello del silicato bicalcico. Questi ultimi inclusi si stima costituiscano al massimo il 0,5 % della massa. Tutti gli inclusi sono fortemente attaccati da HCl 1 : 1.

In questa sezione non si nota traccia di magnetite.

Osservazione della sezione sottile e dei granelli

Anche la sezione sottile è molto uniforme e presenta una tessitura simile a quella notata in sezione lucida (v. fig. 3 e 4 della tav. I).

Tra gli inclusi si nota una netta differenza, dato che una gran parte di essi possiede un indice di rifrazione sensibilmente minore di quello del periclasio nel quale sono immersi; inoltre, in genere, gli inclusi ad indice basso non sono limpidi, ma si presentano opacizzati da un sottilissimo pulviscolo di inclusioni minute nel minerale che costituisce gli inclusi. Nessuna misura si è potuta effettuare in sezione su tali inclusi, data la loro piccolezza ed il fatto che quasi sempre non occupano tutto lo spessore della sezione. Tuttavia, dopo molti preparati in granelli, si è potuto trovare un solido di sfaldatura su cui si sono effettuate misure conoscopiche. Quanto si è potuto stabilire è che il minerale:

— è uniassico positivo;

— ha un indice di rifrazione medio intorno a 1,640;

— presenta colori di interferenza leggermente anomali.

Per quanto la scarsità e la poca precisione dei dati ottici non permettano una determinazione sicura di questo minerale, si può tuttavia ritenere, con ogni probabilità, che esso sia costituito da äkermanite; in ogni modo questo minerale è molto scarso.

Nella sezione sottile si è notata, per quanto raramente, la presenza di zone isotrope (di dimensioni intorno a 0,02 mm.) a sezione rettangolare o quadrangolare. Dato che il valore dell'indice di rifrazione in queste zone, stimato dal rilievo rispetto al periclasio, è molto basso, si pensa che in queste aree si sia in presenza di materiale vetroso che ha riempito spazi restati liberi fra le facce di accrescimento di cristalli di periclasio adiacenti. La percentuale di tale vetro è in ogni modo assolutamente trascurabile.

Campione III — *Osservazione della sezione lucida*

La tessitura di questo campione è poco uniforme, e simile a quella osservata nel campione I (v. fot. 2 alla tav. II). Sono molto abbondanti però le zone ove il campione prende cattiva lucidatura a causa di sottile porosità del periclasio. Sono relativamente frequenti i granuli di magnetite (v. fot. 3 alla tav. II), che in questo caso raggiungono dimensioni fino a 0,08 mm. Tuttavia anche in questo caso la percentale di magnetite è molto bassa, e si può valutare oscilli intorno al 0,04 %.

Anche in questa sezione una gran parte degli inclusi, sempre di dimensioni esigue, mostra un potere riflettente maggiore che non quello del periclasio e del silicato bicalcico.

Osservazione della sezione sottile e dei granelli.

La sezione sottile, di dimensioni molto esigue, è ricavata in una zona particolare e presenta una tessitura molto simile a quella predominante nella sezione sottile del campione II.

Le misure effettuate, oltre a far riconoscere il periclasio ed il silicato

bicalcico, presente nelle due forme α e β, ha permesso di stabilire che anche in questo caso una parte degli inclusi sono probabilmente costituiti da äkermanite.

Di questo campione III, attraverso i dati forniti dall'analisi chimica [1]) si è risaliti alle percentuali in peso dei minerali presenti e si è ottenuto:

periclasio (contenente FeO)	92,08 %
α e β-Ca_2SiO_4	5,65 %
äkermanite	2,11 %
magnetite	0,16 %

Tali percentuali rispondono con sufficiente esattezza a quanto si è potuto osservare sia in sezione lucida che in sezione sottile, salvo per la magnetite, il cui tenore risulta più elevato. La discordanza notata può spiegarsi in due modi, e precisamente:

— le sezioni sono state ricavate in zone particolarmente povere di magnetite, cosa probabile data la poca uniformità del campione;

— i piccoli inclusi che opacizzano la äkermanite possono essere costituiti da magnetite, minerale che è presente spesso quale inclusione nei minerali del gruppo delle meliliti (gruppo a cui appartiene la äkermanite).

Si propende per la prima di queste due ipotesi, dato che la influenza della magnetite eventualmente presente negli inclusi di äkermanite è praticamente trascurabile.

Campione IV — *Osservazione della sezione lucida*

La sezione è molto uniforme, e quasi tutta la sua superficie è costituita dai soliti cristalli di periclasio rotondeggianti o a contorni poligonali orlati da venule di silicato bicalcico. Gli inclusi nel periclasio sono numerosi e la differenza di potere riflettente, già notata nelle altre sezioni, fa pensare che gli inclusi siano in parte costituiti da silicato bicalcico, in parte da äkermanite (v. fig. 4 alla tav. II).

Osservazione della sezione sottile e dei granelli

L'osservazione della sezione sottile di questo campione è interessante, perchè mostra molto chiaramente che siamo in presenza di cristalli di periclasio, nei quali sono concresciuti cristalli scheletriformi di silicato bicalcico (v. fig. 5 e 6 alla tav. I). Il silicato bicalcico è in genere scarso e nettissime si notano le perfette tracce di sfaldatura del periclasio, che proseguono indisturbate nell'attraversare le venule di silicato bicalcico.

---

[1]) SiO_2 2,79 %; FeO 1,12 %; Fe_2O_3 1,54 %; CaO 4,40 %; MgO 90,15 %.

In una zona il silicato bicalcico è quasi assente ed il periclasio mostra numerosi inclusi che presentano un indice di rifrazione sensibilmente minore del periclasio stesso. Le misure effettuate sui granelli hanno permesso di stabilire che anche in questo caso, con ogni probabilità, siamo in presenza di äkermanite.

Praticamente i quattro campioni esaminati non mostrano sensibili differenze nella costituzione mineralogica, dato che una percentuale elevatissima dei minerali presenti (circa 97 ÷ 98 %) è costituita da periclasio (fortemente predominante) e da silicato bicalcico (nelle forme α e β). Differenze si notano solo nei costituenti accessori. Infatti nel campione I è praticamente assente la äkermanite, della quale si notano tracce soltanto dopo aver riconosciuto questo minerale negli altri campioni.

Inoltre la magnetite si riscontra soltanto nel campione I e III. Differenze notevoli si notano invece nella tessitura dei vari campioni; ma siccome tali differenze si notano anche nella sezione di uno stesso campione non si ritiene che si debba dare molto peso a questa osservazione.

Dalle indagini sopra descritte risulta che in massima parte il ferro presente nella magnesia trovasi come FeO, in soluzione solida nel periclasio, ed è per tanto lecito dedurre che l'FeO disciolto nella magnesia resiste all'azione dissociante dell'altissima temperatura e dell'ambiente riducente (forno ad arco diretto).

I risultati delle osservazioni ottiche sullo stato del ferro nei campioni esaminati, ci sono stati confermati dall'esame del comportamento magnetico che abbiamo studiato per il campione III, servendoci dell'apposita attrezzatura esistente presso l'Istituto di Chimica industriale [1]).

I valori della suscettività magnetica misurati alle varie temperature e con campi di intensità differente sono riportati nella tabella seguente:

H Gauss	20°	260°	330°	405°	450°	510°	590°
496,7	55,0	45,5	42,0	38,3	36,4	33,8	24,8
996,8	45,8	37,4	35,8	34,1	32,5	26,8	19,6
1504,0	39,8	32,2	30,3	28,6	27,0	21,5	15,1

(I valori della suscettività sono moltiplicati per 10^6)

[1]) Cirilli V., *Ricerche sulle proprietà magnetiche dei ferriti di calcio.* Gazz. Chim. Ital., 75; 288; (1945).

Si osserva prima di tutto che il materiale è nettamente ferromagnetico, malgrado il diamagnetismo dell'ossido di magnesio (l'ossido ferroso è debolmente paramagnetico) [1].

La variazione della suscettività con la temperatura ci permette però di escludere la presenza di quantità notevoli del ferrito Fe_2O_3 . MgO. Infatti quest'ultimo possiede un punto Curie inferiore a 350°; nel caso quindi che la sostanza ferromagnetica presente nel materiale in esame fosse questo ferrito, al di sopra della temperatura indicata si dovrebbe osservare o diamagnetismo o un molto debole paramagnetismo, ciò che non si verifica. Si osserva invece una netta diminuzione della suscettività nell'intervallo 450° - 600° che può essere attribuita alla presenza di magnetite (punto Curie tra 540° e 590°) probabilmente in soluzione solida con Fe_2O_3 . MgO.

Il materiale a 590° è ancora nettamente ferromagnetico, fatto questo che non potrebbe verificarsi se l'unica sostanza ferromagnetica presente fosse la magnetite. Si può invece concludere da questo comportamento che sono presenti tracce di ferro metallico.

Gli spettrogrammi dei raggi X hanno mostrato che il reticolo del periclasio non ha subìto delle variazioni apprezzabili delle sue dimensioni, in seguito alla dissoluzione di sostanze estranee. (È stata usata una camera per prese Debye di 108 mm. di diametro).

Abbiamo infine voluto esaminare il comportamento termodilatometrico della nostra magnesia elettrofusa, onde confermare la curiosa anomalia segnalata da M. H. Forestier e da A. Portevin e P. Chevenard [2], anomalia che consisterebbe in una lieve diminuzione della dilatabilità fra 500° e 600°.

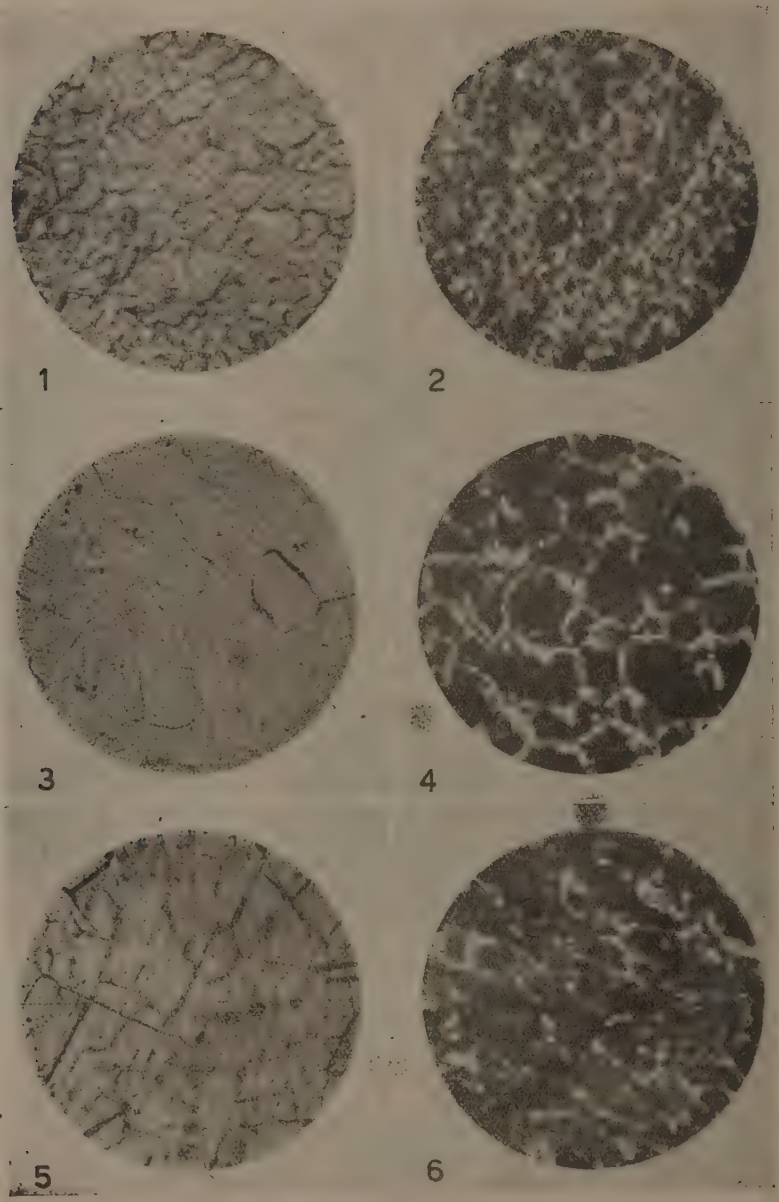
Effettivamente, nelle curve rilevate con l'apparecchio differenziale Chevenard a registrazione fotografica, appare lievissima, ma nettamente percettibile, l'inflessione a 500° che caratterizza l'anomalia su ricordata.

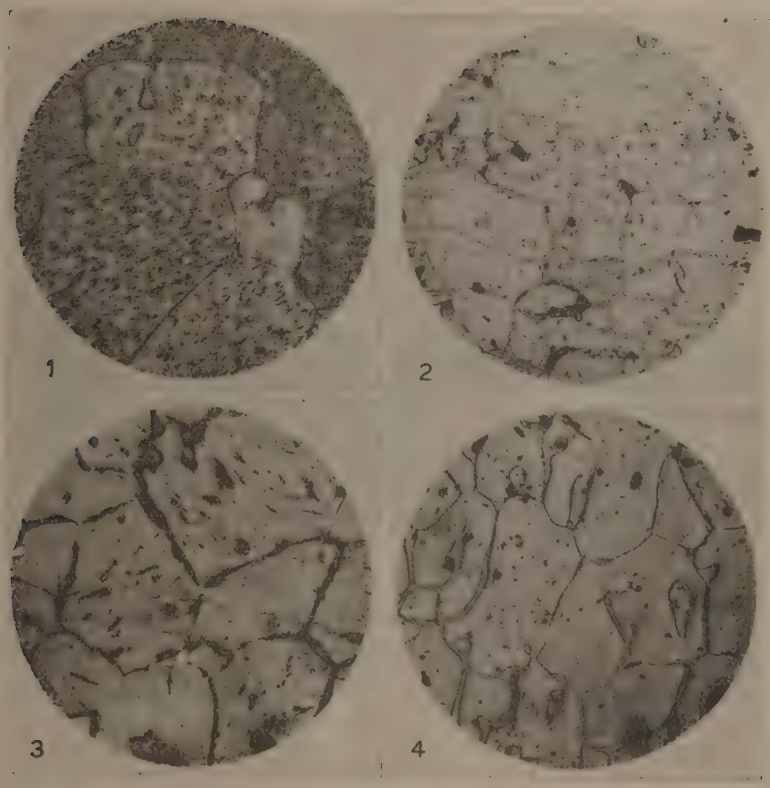
Napoli, Istituti di Chimica Industriale e di Geologia applicata dell'Università.

---

[1]) Cirilli V., *Proprietà magnetiche della wüstite*. Gazz. Chim. Ital., 75; 242; (1945).

[2]) Portevin A. e Chevenard P., *Analyse dilatométrique de quelques substances non métalliques: minéraux, roches et produits industriels*, VIII Congrès de Chimie Industrielle, Chimie et Industrie, Numéro Special, 1928.


1
2
3
4
5
6


1
2
3
4

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I

Fig. 1. — Campione I, sezione sottile, nicols paralleli ; x 65. — La massa fondamentale è costituita da periclasio (granuli rotondeggianti e grossi cristalli). Attorno ai cristalli e ai granuli di periclasio, vene di silicato bicalcico ; raramente si notano piccoli inclusi rotondeggianti nel periclasio. La sezione sottile, nella zona fotografata, è costituita da cristalli abetiformi di periclasio nei quali sono concresciuti cristalli scheletriformi di silicato bicalcico.

Fig. 2. — Campione I, sezione sottile, nicols X ; x 65. — A nicols incrociati, la tessitura di cui in fig. 1 appare molto chiaramente. In effetti, le numerose venule di silicato bicalcico, in vaste aree, estinguono e si illuminano contemporaneamente, come appare chiaro dalla fotografia, nella quale le parti scure sono costituite da periclasio e le chiare da silicato bicalcico. La quantità di silicato bicalcico appare maggiore di quanto in realtà non sia, per il fatto che le venule di questo minerale, che sono in genere molto sottili, sono spesso oblique rispetto alla sezione. Per questa ragione, dato che il periclasio è perfettamente limpido, anche quelle parti delle venule di silicato che si affondano sotto il periclasio danno luogo a fenomeni di birifrangenza.

Notare, nella parte destra della fotografia, la larga fascia più chiara con direzione NE-SW e, adiacente ad essa, a sinistra, la più stretta fascia scura ; questo è chiaro indice del fatto che le venule di silicato bicalcico sono costituite da cristalli isoorientati, che estinguono e si illuminano contemporaneamente.

Fig. 3. — Campione II, sezione sottile, nicols paralleli ; x 65. — Cristalli di periclasio a sezione rotondeggiante e poligonale contornati da venule sottili di silicato bicalcico. Notare gli inclusi rotondeggianti di äkermanite, che si distinguono a causa del rilievo che acquistano in conseguenza della forte differenza di indice di rifrazione esistente tra essi ed il periclasio ; uno di questi inclusi particolarmente appariscente si nota nel quadrante NE.

Fig. 4. — Campione II, sezione sottile, nicols X ; x 65. — Cristalli poligonali o rotondeggianti di periclasio (scuri), orlati da venule di silicato bicalcico e mostranti numerosi inclusi. La fotografia è stata eseguita nella stessa area della fig. 3. Questo permette di osservare come sia facile la distinzione fra gli inclusi di silicato bicalcico e quelli di äkermanite. In effetti, nel quadrante NE si notano ora due inclusi fortemente anisotropi, mentre nella stessa fotografia a luce normale, solo l'incluso più in alto appariva chiaramente ; l'incluso più in basso, costituito da silicato bicalcico, avendo un indice di rifrazione sensibilmente uguale a quello del periclasio, non si nota a nicols paralleli. Anche in questo caso, per quanto riguarda la percentuale apparente del silicato bicalcico, vale quanto detto per la fig. 2.

Fig. 5. — Campione IV, sezione sottile, nicols paralleli ; x 65. — Cristalli a contorno poligonale o rotondeggiante di periclasio, contornati da venule sottili di silicato bicalcico e con numerosi inclusi (rotondeggianti) di äkermanite. Notare le numerose tracce di sfaldatura cubica ognuna delle quali interessa più di un cristallo di periclasio.

Fig. 6. — Campione IV, sezione sottile, nicols X ; x 65. — La fotografia è stata presa nella stessa area della fig. 5. Le aree scure sono costituite da periclasio, le chiare da silicato bicalcico ; inclusi di äkermanite e silicato bicalcico. Circa l'apparente abbondanza di silicato bicalcico, vedi quanto detto a proposito della fig. 2.

Tavola II

Fig. 1. — Campione I, sezione lucida, nicols paralleli; x 110. — Cristalli di periclasio a contorno poligonale, bordati, in qualche punto, da venule di silicato bicalcico. Anche gli inclusi sono costituiti da silicato bicalcico; infatti, spesso, rami di cristalli scheletriformi di silicato bicalcico, concresciuti con cristalli di periclasio, sezionati in direzione grossomodo normale al loro allungamento, danno l'impressione di piccoli inclusi. La åkermanite, che si riconosce per il diverso potere riflettente e per la minore limpidezza rispetto al silicato bicalcico, non può differenziarsi in fotografia. In questo campione in ogni modo, la åkermanite è particolarmente scarsa.

Fig. 2. — Campione III, sezione lucida, nicols paralleli; x 110. — Cristalli a contorno grossolanamente poligonale di periclasio, più o meno porosi, contornati da venule di silicato bicalcico e con inclusi di åkermanite e di silicato bicalcico. Gli inclusi di åkermanite sono in genere a sezione rotondeggiante.

Fig. 3. — Campione III, sezione lucida, nicols paralleli; x 110. — Cristalli di periclasio a contorno poligonale (grigio chiaro) contornati da venule di silicato bicalcico (scure) e con piccole zone a magnetite (molto chiare). Le venule di silicato bicalcico sono scure, dato che buona parte del minerale è stato asportato durante la lucidatura, condotta in modo da far prendere buon lucido alla magnetite. Risulta chiaro dalla fotografia che le zone a magnetite, specialmente per la posizione e la forma delle zone allungate, segnate in fotografia con frecce, si sono formate dopo la consolidazione dei cristalli di periclasio.

Fig. 4. — Campione IV, sezione lucida, nicols paralleli: x 110. — Grossi cristalli di periclasio bordati da venule di silicato bicalcico. Il periclasio in questa zona è poco poroso e senza inclusi.

I sistemi omaloidici di ipersuperficie dell'S_4, legati alle algebre complesse d'ordine 4, dotate di modulo

Nota di **C. Marietta Carbonaro**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 6 novembre 1948)

Sunto. — In ciascuna delle 17 algebre complesse d'ordine 4, dotate di modulo è studiata la funzione inversa $x' = x^{-1}$, alla quale corrisponde una trasformazione cremoniana involutoria dell'S_4. Sono caratterizzati i sistemi omaloidici di ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani in queste trasformazioni.

È noto come alla funzione inversa:

$$x' = x^{-1}, \tag{1}$$

in un'algebra complessa, ad r unità, dotata di modulo, corrisponda una trasformazione cremoniana involutoria, in un S_r complesso nei punti del quale vengono rappresentati gli elementi dell'algebra [1]).

Qualora si consideri l'algebra ampliata con l'introduzione degli elementi all'infinito e la si rappresenti, per conseguenza, in un S_r complesso proiettivo, detta trasformazione permette di definire gli inversi anche dello zero e dei divisori dello zero dell'algebra [2]).

Nella presente Nota, considero le algebre complesse d'ordine 4 dotate di modulo, classificate, rispetto alla relazione di equivalenza, in 17 tipi [3]), e per ciascuna di esse determino la trasformazione cremoniana dell'S_4 immagine della funzione inversa (1), caratterizzando il gruppo omaloidico delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani.

---

[1]) Spampinato N., *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa, ad n unità, dotata di modulo*, Memoria IV, parte 6ª, § 17 (Rend. Circolo Mat. di Palermo).

[2]) Rammentiamo che un elemento x di un'algebra dicesi *divisore destro (sinistro)* dello zero se è diverso da zero ed esiste un elemento y dell'algebra, anch'esso diverso da zero, tale che $yx = 0$ ($xy = 0$). Per un'algebra dotata di modulo, ogni divisore dello zero è, nello stesso tempo, divisore destro e sinistro. Cfr. G. Scorza, *Corpi numerici ed algebre* (Principato, Messina), parte II, cap. II, n.i 64, 107.

[3]) Study E., *Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendungen in der Theorie der Transformationsgruppen* (Monatshefte für Mathematik und Physik, I Jahrgang, 1890, pp. 283-355), G. Scorza, *Le algebre del 4° ordine* (Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, vol. XX, serie 2ª, 1935), e C. Carbonaro, *Le algebre complesse d'ordine 4, dotate di modulo* (Accademia Gioenia, Catania, 1935).

Tale determinazione è stata già fatta dal prof. SPAMPINATO, per le algebre complesse dotate di modulo d'ordine 2, e da me, per quelle d'ordine 3 [1].

1. Consideriamo l'algebra A_1 avente la tabella di moltiplicazione

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$
u_3	u_3	$-u_4$	$-u_1$	u_2
u_4	u_4	u_3	$-u_2$	$-u_1$

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ [2] è:

$$\mu'_x = \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ -\xi_2 & \xi_1 & \xi_4 & -\xi_3 \\ -\xi_3 & -\xi_4 & \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_4 & \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 \end{Vmatrix}$$

ed il determinante di essa (determinante sinistro di x) è:

$$\delta'_x = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^2.$$

Lo zero ed i divisori dello zero dell'algebra sono dunque gli elementi per i quali si ha:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0 \quad [3]. \tag{2}$$

Qualora si rappresenti l'algebra in un S_4 complesso, facendo corrispondere

---

[1]) SPAMPINATO N., *I gruppi di affinità e di trasformazioni quadratiche piane legati alle due algebre complesse doppie dotate di modulo* (Bollettino Accademia Gioenia, Catania, 1934) e C. CARBONARO, *Affinità, trasformazioni cremoniane e gruppi automorfi delle algebre complesse del 3° ordine, dotate di modulo* (Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, 1935).

[2]) cioè la matrice $||\xi'_{ij}||$, avendo posto $xu_i = \sum_{j=1}^{4} \xi_{ij} u_j$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Cfr. loc. cit. nella nota [1]) della pag. precedente, parte II, cap. II, n. 185.

[3]) lo zero ed i divisori dello zero sinistri (destri) di un'algebra sono tutti e soli quegli elementi la cui matrice sinistra (destra) è degenere. Loc. cit. in [2]). parte II, cap. II, n. 193.

ad un elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ il punto (ξ_i) dell'S_4, lo zero ed i divisori dello zero vengono rappresentati nei punti dell'iperquadrica di equazione (2), la quale è un S_0–cono col vertice nel punto O (0, 0, 0, 0, 0).

Se indichiamo con $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ l'inverso dell'elemento x (supposto non zero nè divisore dello zero), deve essere:

$$xx' = u_1, \tag{3}$$

poichè u_1 è il modulo dell'algebra.

Dalla (3), eseguendo il prodotto xx' ed eguagliando i coefficienti di una stessa unità nei due membri, si traggono le relazioni:

$$\begin{cases} \xi_1\xi_1' - \xi_2\xi_2' - \xi_3\xi_3' - \xi_4\xi_4' = 1, \\ \xi_2\xi_1' + \xi_1\xi_2' - \xi_4\xi_3' + \xi_3\xi_4' = 0, \\ \xi_3\xi_1' + \xi_4\xi_2' + \xi_1\xi_3' - \xi_2\xi_4' = 0, \\ \xi_4\xi_1' - \xi_3\xi_2' + \xi_2\xi_3' + \xi_1\xi_4' = 0, \end{cases}$$

che risolte rispetto alle ξ_1', ξ_2', ξ_3', ξ_4' danno luogo alle:

$$\xi_1' = \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2}, \qquad \xi_2' = \frac{-\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2},$$

$$\xi_3' = \frac{-\xi_3}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2}, \qquad \xi_4' = \frac{-\xi_4}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2}.$$

Queste sono le equazioni della trasformazione cremoniana dell'S_4, immagine della funzione inversa (1) nell'algebra considerata. Esse in coordinate omogenee si scrivono:

$$\xi_1' = \xi_1\xi_5, \quad \xi_2' = -\xi_2\xi_5, \quad \xi_3' = -\xi_3\xi_5, \quad \xi_4' = -\xi_4\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2.$$

Si tratta dunque di una trasformazione quadratica (involutoria) in cui agli iperpiani di S_4 corrispondono le iperquadriche passanti per il punto O (0, 0, 0, 0, 1) e per la superficie γ di equazioni:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0, \qquad \xi_5 = 0$$

(si noti che l'ipersuperficie i punti della quale sono le immagini dello zero e dei divisori dello zero dell'algebra, è l'S_0-cono che proietta γ da O).

Dunque: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all'algebra* A_4, *il sistema delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani è costituito dalle iperquadriche passanti per una superficie quadrica e per un punto fuori di essa.*

Indicando con m_h l'ordine della varietà V_h corrispondente ad un S_h, gli *indici* m_1, m_2, m_3 della trasformazione sono tutti eguali a 2.

2. Consideriamo l'algebra A_4 avente la tabella di moltiplicazione:

$$u_i u_j = \begin{cases} u_i, & \text{per } i = j \\ 0, & \text{per } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, 4).$$

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ (coincidente con la matrice destra, poichè l'algebra è commutativa) è:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_4 \end{Vmatrix}.$$

Lo zero ed i divisori dello zero dell'algebra sono dunque rappresentati, in un S_4 complesso, nei punti degli iperpiani coordinati:

$$\xi_1 = 0, \qquad \xi_2 = 0, \qquad \xi_3 = 0, \qquad \xi_4 = 0.$$

Dato un altro elemento $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ dell'algebra, si ha:

$$xx' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i \xi_i' u_i;$$

poichè il modulo dell'algebra è $\sum_{i=1}^{4} u_i$, se x' è l'inverso di x, deve essere

$$xx' = \sum_{i=1}^{4} u_i$$

e quindi:

$$\xi_i' = \frac{1}{\xi_i} \qquad (i = 1, \ldots, 4).$$

In coordinate omogenee queste equazioni si scrivono:

$$\xi_1' = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4, \quad \xi_2' = \xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_5, \quad \xi_3' = \xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_5, \quad \xi_4' = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4.$$

Nella trasformazione cremoniana involutoria dell'S_4 che esse rappresentano, agli iperpiani corrispondono le ipersuperficie d'ordine 4 aventi come tripli i punti fondamentali $C_1(1,0,0,0,0)$, $C_2(0,1,0,0,0)$, $C_3(0,0,1,0,0)$, $C_4(0,0,0,1,0)$, $C_5(0,0,0,0,1)$.

Cioè: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all'algebra* A_3, *il sistema delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani è costituito dalle ipersuperficie d'ordine* 4 *aventi come tripli cinque dati punti indipendenti* [1]).

Si noti che queste ipersuperficie ammettono come doppie le dieci rette che congiungono questi punti a due a due [2]) e come semplici i dieci piani che li congiungono a tre a tre.

Gli *indici* della trasformazione sono $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $m_3 = 4$ (m_h è l'ordine della varietà V_h corrispondente ad un S_h).

3. Consideriamo l'algebra A_3 avente la tabella di moltiplicazione:

$$u_i u_j = \begin{cases} u_i, & \text{per } i=j \\ 0, & \text{per } i \neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,3), \qquad u_4 u_h = u_h u_4 = \begin{cases} u_4, & \text{per } h=1 \\ 0, & \text{per } h=2,3,4 \end{cases}.$$

Essa è commutativa ed il suo modulo è $u_1+u_2+u_3$.

La matrice sinistra (coincidente con la destra) di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è:

$$\mu'_x = \begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_4 \\ 0 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_4 \end{Vmatrix}$$

onde lo zero ed i divisori dello zero dell'algebra sono rappresentati nei punti degli iperpiani coordinati $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$.

Se $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ è l'inverso dell'elemento x, poichè:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + \xi_2\xi_2' u_2 + \xi_3\xi_3' u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_4\xi_1') u_4,$$

da

$$xx' = u_1 + u_2 + u_3$$

---

[1]) Il sistema omaloidico delle ipersuperficie d'ordine n dell'S_n aventi come $(n-1)$pli $n+1$ dati punti indipendenti, è stato considerato da G. Marletta, *Alcuni sistemi omaloidici nell'* S_n (Rend. Circ. Mat. di Palermo, Tomo XLIX, 1925), § 2, n. 6.

[2]) Se una ipersuperficie Φ d'ordine n ha due punti O, O' $(n-1)$pli, la retta che li congiunge ha per Φ una multiplicità non minore di $n-2$. Infatti, indicando con x questa multiplicità, un piano generico condotto per detta retta seca ulteriormente Φ in una curva d'ordine $n-x$, per la quale i punti O ed O' hanno la multiplicità $n-x-1$. Ne segue $2(n-x-1) \leq n-x$, cioè $x \geq n-2$, onde $x=n-2$, ovvero $x=n-1$.

si trae:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_3' = \frac{1}{\xi_3}, \quad \xi_4' = -\frac{\xi_4}{\xi_4^2}.$$

Si ottengono così le equazioni della trasformazione cremoniana τ, dell'S_4, immagine della funzione inversa (1). In coordinate omogenee, esse diventano:

$$\xi_1' = \xi_1\xi_2\xi_3\xi_5, \quad \xi_2' = \xi_1^2\xi_3\xi_5, \quad \xi_3' = \xi_1^2\xi_2\xi_5, \quad \xi_4' = -\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1^2\xi_2\xi_3.$$

Ad un iperpiano, di equazione:

$$a\xi_1' + b\xi_2' + c\xi_3' + d\xi_4' + e\xi_5' = 0,$$

corrisponde l'ipersuperficie d'ordine 4, di equazione:

$$(4) \qquad a\xi_1\xi_2\xi_3\xi_5 + b\xi_1^2\xi_3\xi_5 + c\xi_1^2\xi_2\xi_5 - d\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5 + e\xi_1^2\xi_2\xi_3 = 0,$$

la quale ammette come tripli i punti $C_2(0,1,0,0,0)$, $C_3(0,0,1,0,0)$, $C_4(0,0,0,1,0)$, $C_5(0,0,0,0,1)$ e nel punto C_4 ammette i tre S_3 tangenti $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_5 = 0$, la cui retta comune (cioè la retta C_4C_4) è doppia per essa.

Viceversa, è facile verificare come un'ipersuperficie d'ordine 4 che sodisfi alle condizioni suddette, abbia l'equazione del tipo (4) e quindi sia l'omologa di un iperpiano nella trasformazione τ.

Pertanto: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all'algebra* A_3, *il sistema delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani è costituito dalle ipersuperficie d'ordine 4 aventi come tripli quattro dati punti indipendenti, ammettenti in uno di essi tre dati* S_3 *come tangenti (distinti dall'* S_3 *al quale appartengono i quattro punti tripli) ed aventi come doppia la retta comune a questi* S_3.

Queste ipersuperficie contengono, per conseguenza, oltre ai piani congiungenti a tre a tre i quattro punti tripli, anche i piani passanti per la retta C_4C_4 e per uno dei punti C_2, C_3, C_5, tutti piani che sono semplici per la generica di esse.

Si noti che un piano generico condotto per la retta C_4C_4 seca una generica ipersuperficie del sistema in questa retta contata due volte ed in una conica avente detta retta come tangente in C_4, cioè complessivamente in una curva che ha come tripli C_4 ed un altro punto ad esso infinitamente vicino sulla retta C_4C_4.

Concludiamo che le ipersuperficie del sistema hanno un altro punto triplo infinitamente vicino a C_4, sulla retta C_4C_4, cosicchè tale sistema è

dello stesso tipo di quello legato all'algebra precedente, nel caso in cui dei cinque punti tripli due siano infinitamente vicini.

Che il sistema sia omaloidico, si verifica come per l'algebra precedente, nell'ipotesi che i punti tripli per le ipersuperficie che lo costituiscono siano C_2, C_3, C_4, C_5 ed il punto infinitamente vicino a C_4 sulla retta C_1C_4.

Due ipersuperficie del sistema hanno in comune una superficie d'ordine 16, per la quale i punti C_2, C_3, C_5 hanno la multiplicità 9, il punto C_4 la multiplicità 12, le rette C_1C_4, C_2C_3, C_2C_5, C_3C_5 la multiplicità 4, le rette C_2C_4, C_3C_4, C_4C_5 la multiplicità 6 (perchè tutte le ipersuperficie del sistema ammettono lungo ognuna di queste rette due stessi S_3 tangenti). Di queste ipersuperficie fanno parte i piani $C_2C_3C_4$, $C_2C_4C_5$, $C_3C_4C_5$, ciascuno contato due volte (perchè lungo ognuno di essi le ipersuperficie del sistema ammettono uno stesso S_3 tangente) ed i piani $C_1C_2C_4$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_4C_5$, $C_2C_3C_5$. Rimane una superficie φ d'ordine 6, avente i punti C_2 C_3, C_4, C_5 come tripli, le congiungenti tali punti a due a due e la retta C_1C_4 come semplici. Nel punto C_4 essa ammette i tre piani tangenti $C_1C_2C_4$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_4C_5$. Lungo la retta C_2C_4 φ ammette il piano tangente $C_1C_2C_4$, comune ai due S_3 $\xi_3 = 0$, $\xi_5 = 0$ tangenti lungo detta retta alle ipersuperficie del sistema. Lo stesso si dica per le rette C_3C_4, C_4C_5; lungo la prima, le ipersuperficie del sistema ammettono i due S_3 tangenti $\xi_2 = 0$, $\xi_5 = 0$ e la superficie φ ammette il piano tangente $C_1C_3C_4$ comune a questi S_3; lungo la seconda si hanno i due S_3 $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ tangenti alle ipersuperficie del sistema ed il piano $C_1C_4C_5$, ad essi comune, tangente alla superficie φ.

Ed ora, una terza ipersuperficie del sistema seca φ in una curva di ordine 24, per la quale i punti C_2, C_3, C_5 hanno la multiplicità 9, il punto C_4 la multiplicità 15 e della quale fanno parte le rette C_1C_4, C_2C_3, C_2C_5, C_3C_5, ciascuna contata due volte e le rette C_2C_4, C_3C_4, C_4C_5, ciascuna contata quattro volte. Rimane una curva d'ordine 4, passante semplicemente per i punti C_2, C_3, C_4, C_5 ed ammettente in C_4 la retta C_1C_4 come tangente. Essa seca una quarta ipersuperficie del sistema in 16 punti, dei quali tre coincidono con C_2, tre con C_3, sei con C_4, tre con C_5. Rimane così dimostrato che esiste un sol punto variabile comune a quattro ipersuperficie del sistema.

4. Consideriamo l'algebra A_4 avente la tabella di moltiplicazione:

$$u_iu_j = \begin{cases} u_i, & \text{per } i=j \\ 0, & \text{per } i \neq j \end{cases} \qquad (i,j = 1,2,3), \quad u_2u_4 = u_4u_4 = u_4,$$

$$u_1u_4 = u_3u_4 = u_4u_2 = u_4u_3 = u_4^2 = 0.$$

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_4 \\ 0 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_5 \end{Vmatrix},$$

onde, rappresentando l'algebra in un S_4 complesso, lo zero ed i divisori dello zero hanno per immagini i punti degli iperpiani coordinati:

$$\xi_1 = 0, \qquad \xi_2 = 0, \qquad \xi_3 = 0.$$

Se $x' = \sum_{i=1}^{5} \xi_i' u_i$ è l'inverso di x, si ha:

$$xx' = u_1 + u_2 + u_3$$

(poichè $u_1+u_2+u_3$ è il modulo dell'algebra). Ne seguono le relazioni:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \qquad \xi_2' = \frac{1}{\xi_2}, \qquad \xi_3' = \frac{1}{\xi_3}, \qquad \xi_4' = -\frac{\xi_4}{\xi_1 \xi_2},$$

che rappresentano la trasformazione cremoniana dell'S_4, immagine della funzione inversa (1). In coordinate omogenee, le equazioni di questa trasformazione sono:

$$\xi_1' = \xi_2\xi_3\xi_5, \quad \xi_2' = \xi_1\xi_3\xi_5, \quad \xi_3' = \xi_1\xi_2\xi_5, \quad \xi_4' = -\xi_3\xi_4\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1\xi_2\xi_3.$$

Le ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani sono quelle di ordine 3, che hanno come doppi i punti C_3, C_5 e come doppie le rette C_1C_4, C_2C_4, avendo indicato con C_i il punto di S_4 che ha non nulla solo la i-ma coordinata omogenea ($i = 1, \ldots, 5$).

Cioè: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all'algebra* Λ_4, *il sistema delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani è costituito dalle ipersuperficie cubiche aventi come doppie due rette tra loro complanari e come doppi due punti non appartenenti insieme con le due rette ad uno stesso iperpiano.*

Si noti che dette ipersuperficie contengono (semplicemente) i piani $C_1C_2C_4$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_4C_5$, $C_2C_3C_4$, $C_2C_4C_5$ e la retta C_3C_5. Inoltre esse ammettono come tangente lungo la retta C_3C_4 l'S_3 $\xi_3 = 0$ [1]) e come tangente lungo la retta C_4C_5 l'S_3 $\xi_3 = 0$; nel punto doppio C_4 si hanno i due S_3 tangenti $\xi_3 = 0$, $\xi_5 = 0$.

[1]) Infatti, quest'S_3 le seca nei piani $C_1C_2C_4$, $C_1C_3C_4$, $C_2C_3C_4$ ed una retta generica di esso incidente la retta C_3C_4 in un punto M seca ogni ipersuperficie in un sol punto distinto da M.

Per verificare che quattro ipersuperficie si secano in un sol punto variabile, osserviamo che due Γ_1 e Γ_2 di esse si secano in una V_2^3 avente le rette C_1C_4, C_2C_4 come 4-ple, la retta C_3C_5 semplice, il punto C_4 6-plo, i punti C_3, C_5 4-pli e della quale fanno parte i piani $C_1C_2C_4$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_4C_5$, $C_2C_3C_4$, $C_2C_4C_5$. Rimane una V_2^4 contenente semplicemente le rette C_1C_4, C_2C_4, C_3C_5, avente come doppi i punti C_3, C_5 ed ammettente nel punto C_4 il piano tangente $C_1C_2C_4$.

Essa ha una retta in ciascuno dei piani $C_1C_3C_4$, $C_1C_4C_5$, $C_2C_3C_4$, $C_2C_4C_5$. Infatti, un S_3 generico Σ condotto ad es. per il piano $\pi_1 \equiv C_1C_3C_4$ seca ciascuna delle due ipersuperficie Γ_1 e Γ_2 in questo piano ed, oltre, in una quadrica, la quale contiene la retta C_1C_4, il punto C_3 e la retta r comune a Σ ed al piano $C_2C_4C_5$; si hanno così in Σ due quadriche la cui intersezione è costituita dalle rette C_1C_4, r e da una conica c passante per C_3. Ora la V_2^4 comune a Γ_1 e Γ_2 è secata da Σ in una V_1^4 della quale fa parte la retta C_1C_4 e che ammette come doppio il punto C_3; poichè di tale V_1^4 la parte situata fuori dal piano π_1 è costituita solo dalla conica c, rimane una retta appartenente a π_1 e passante per C_3. Cioè, la V_2^4 ha in comune col piano π_1 una retta p_1 uscente da C_3.

A tale risultato si perviene anche osservando che ogni S_3 condotto per π_1 tocca Γ_1 (e così Γ_2) lungo una retta, di questo piano, passante per C_3 e viceversa, ad una siffatta retta corrisponde un S_3 (per π_1) che tocca Γ_1 (Γ_2) lungo essa. Si ha una proiettività tra gli spazi passanti per π_1 e le rette del fascio (C_3, π_1), lungo le quali tali spazi toccano Γ_1 (Γ_2). Esistono allora due spazi per π_1 ciascuno dei quali tocca Γ_1 e Γ_2 lungo una *stessa* retta; uno di essi è l'S_3 $\xi_5 = 0$ che, come abbiamo già osservato, tocca ogni ipersuperficie del sistema lungo la retta C_3C_4. Se consideriamo l'altro di tali due spazi e diciamo p_1 la retta lungo la quale esso tocca Γ_1 e Γ_2, è chiaro che p_1 risulta doppia per la completa intersezione di Γ_1 e Γ_2 e quindi appartiene alla V_2^4 in cui, oltre ai piani base, Γ_1 e Γ_2 si secano [1]).

[1]) Se l'equazione di Γ_1 è:

$$(5) \qquad a_1\xi_2\xi_3\xi_5 + b_1\xi_1\xi_3\xi_5 + c_1\xi_1\xi_2\xi_5 + d_1\xi_3\xi_4\xi_5 + f_1\xi_1\xi_3\xi_5 = 0,$$

lungo una retta, del piano π_1, di equazione $\xi_4 = \mu\xi_1$, si ha l'S_3 tangente di equazione $f_1\mu\xi_1 + (b_1\mu + d_1)\xi_5 = 0$. Cioè, indicando con $\xi_5 = \lambda\xi_2$ l'equazione di un S_3 generico Σ condotto per π_1 e con $\xi_4 = \mu\xi_1$ quella di una retta generica s di π_1, uscente da C_3, si ha che Σ risulta tangente a Γ_1 lungo i punti di s quando è soddisfatta la relazione:

$$(6) \qquad \lambda = -\frac{f_1\mu}{b_1\mu + d_1},$$

la quale rappresenta una proiettività tra gli S_3 del fascio (π_1) e le rette del fascio (C_3, π_1).

Concludiamo così, estendendo ai piani $C_1C_3C_5$, $C_2C_3C_4$, $C_2C_4C_5$ il ragionamento fatto per il piano $C_1C_3C_4$, che la Γ_2^4 ha una retta p_1, uscente da C_3, in $C_1C_3C_4$, una retta p_2 uscente da C_3 in $C_1C_4C_5$, una retta p_3 uscente da C_3 in $C_2C_3C_4$ ed una retta p_4 uscente da C_5 in $C_2C_4C_5$.

Essa seca una terza ipersuperficie Γ_3 del sistema in una V_4^{12} della quale fanno parte le rette C_1C_4, C_2C_4, ciascuna contata due volte e le rette C_3C_5, p_1, p_2, p_3, p_4. Rimane una V_1^3 che passa per i punti C_3, C_5 (quadrupli per la V_4^{12}); essa, come sarà dimostrato più avanti, si appoggia alle rette C_1C_4, C_2C_4 in punti che indichiamo rispettivamente con P e Q.

Tale V_1^3 ha in comune con una quarta ipersuperficie del sistema 9 punti, dei quali due cadono in C_3, due in C_5, due in P e due in Q. È dunque vero che quattro ipersuperficie del sistema hanno un sol punto variabile in comune.

Rimane da dimostrare che la V_1^3 ulteriore intersezione di tre ipersuperficie Γ_1, Γ_2, Γ_3 del sistema, si appoggia alle rette C_1C_4, C_2C_4. Indichiamo con f tale cubica e con φ la V_3^5 ulteriore intersezione di Γ_1 e Γ_2. Un eventuale punto comune ad f ed alla retta C_1C_4 ad es., è triplo per la completa intersezione di φ con Γ_3, onde in esso il piano tangente a φ deve appartenere alla V_3^2 tangente a Γ_3; e viceversa.

Ora, in un punto $M(\mu, 0, 0, 1, 0)$ della retta C_1C_4 la superficie φ ammette come tangente il piano di equazioni:

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi_5 = \alpha\xi_3 \\ [\alpha'(d_1c_2 - d_2c_1) + f_2d_1 - f_1d_2]\,\xi_2 - \alpha(b_1d_2 - b_2d_1)\,\xi_3 = 0. \end{cases}$$

con:

$$(10)\qquad \alpha = -\frac{\mu(f_2b_1 - f_1b_2) + f_2d_1 - f_1d_2}{\mu(b_1c_2 - b_2c_1) + d_1c_2 - d_2c_1}\ ^{1}).$$

Analogamente si dica per l'ipersuperficie Γ_2; indicando con

$$(7)\qquad a_2\xi_2\xi_3\xi_5 + b_2\xi_1\xi_3\xi_5 + c_2\xi_1\xi_2\xi_5 + d_2\xi_3\xi_4\xi_5 + f_2\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$$

la sua equazione, lungo la retta s del piano π_1 essa ammette l'S_3 tangente di equazione $\xi_5 = \lambda'\xi_3$, con

$$(8)\qquad \lambda' = -\frac{f_2\mu}{b_2\mu + d_2}.$$

Per avere quindi un S_3 che tocca Γ_1 e Γ_2 lungo la stessa retta, bisogna eguagliare i due valori di λ e λ' dati dalle (6) ed (8). Si ottengono per μ i due valori:

$$\mu = 0, \qquad \mu = \frac{f_1d_2 - f_2d_1}{f_2b_1 - f_1b_2}.$$

[1]) Nel punto M le ipersuperficie Γ_1 e Γ_2, delle quali le (5) e (7) sono le equazioni, ammettono rispettivamente le V_3^2 tangenti:

$$f_1\mu\xi_2\xi_3 + c_1\mu\xi_2\xi_5 + (b_1\mu + d_1)\xi_3\xi_5 = 0,$$
$$f_2\mu\xi_2\xi_3 + c_2\mu\xi_2\xi_5 + (b_2\mu + d_2)\xi_3\xi_5 = 0$$

piano che, al variare di M sulla retta C_1C_4, descrive una V_3^2 [la cui equazione si ottiene eliminando α fra le (9)]. Indichiamo con Φ tale V_3^2; essa è un S_4 cono, di asse C_1C_4, contenente i piani $C_1C_2C_4$ (tangente a φ in C_4), $C_1C_3C_4$ (tangente a φ nel punto $P_1 \equiv p_1 \,.\, C_1C_4$), $C_1C_4C_5$ (tangente a φ nel punto $P_2 \equiv p_2 \,.\, C_1C_4$).

L'ipersuperficie Γ_3, la cui equazione indichiamo con:

$$a_3\xi_2\xi_3\xi_5+b_3\xi_1\xi_3\xi_5+c_3\xi_1\xi_2\xi_5+d_3\xi_1\xi_3\xi_5+f_3\xi_1\xi_2\xi_3=0,$$

ammette nel punto M come tangente la V_3^2 di equazione:

$$f_3\mu\xi_2\xi_3+c_3\mu\xi_2\xi_5+(b_3\mu+d_3)\xi_3\xi_5=0$$

e questa, al variare di M su C_1C_4 (cioè al variare di μ), descrive un fascio [1] che indicheremo con (Ψ).

Tra i punti tali che in ognuno di essi il piano tangente a φ appartenga alla V_3^2 tangente a Γ_3, sono certamente C_4, P_1, P_2. Per vedere se esistono altri punti siffatti, consideriamo la corrispondenza birazionale che si stabilisce tra i piani di Φ e le V_3^2 di (Ψ) chiamando corrispondenti un piano ed una V_3^2 quando sono tangenti, rispettivamente a φ ed a Γ_3, in uno stesso punto di C_1C_4. La V_3^2 corrispondente ad un piano σ di Φ seca questa ipersuperficie, oltre che nei piani $C_1C_2C_4$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_4C_5$, in un piano σ'. Assumendo questo quale omologo di σ, si ottiene tra i piani di Φ una proiettività. Dei due piani uniti di questa, uno è il piano $C_1C_2C_4$ (la V_3^2 tangente a Γ_3 nel punto C_4 ammette questo piano come *doppio*, poichè si spezza nei due S_3 $\xi_3=0$, $\xi_5=0$); se ρ è l'altro piano unito, esso evidentemente è tangente a φ in un punto P ed appartiene alla V_3^2 tangente a Γ_3 in P. Tale punto P appartiene quindi alla cubica f.

5. Consideriamo l'algebra A_5 avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	0	0	0
u_2	0	u_2	u_3	u_4
u_3	u_3	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0

---

e queste si secano, oltre che nei piani $C_1C_2C_4$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_4C_5$, nel piano di equazioni:

$$\begin{cases} [\mu(f_2b_1-f_1b_2)+f_2d_1-f_1d_2]\xi_3+[\mu(b_1c_2-b_2c_1)+d_1c_2-d_2c_1]\xi_5=0 \\ (f_2c_1-f_1c_2)\mu\xi_3+[\mu(f_2b_1-f_1b_2)+f_2d_1-f_1d_2]\xi_5=0, \end{cases}$$

che, con la posizione (10), assumono la forma (9).

[1] costituito dagli S_4-coni quadrici di asse C_1C_4, contenenti i piani $C_1C_2C_4$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_4C_5$ ed aventi lungo il piano $C_1C_2C_4$ l'S_3 tangente $f_3\xi_3+c_3\xi_5=0$.

La matrice sinistra di un elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 \end{Vmatrix},$$

onde i divisori dello zero dell'algebra sono gli elementi per i quali si ha $\xi_1 = 0$, ovvero $\xi_2 = 0$.

Posto $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$, il prodotto xx' è dato da:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + \xi_3\xi_3' u_2 + (\xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_4') u_3 + (\xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_2') u_4$$

e se x' è l'inverso di x, dall'eguaglianza

$$xx' = u_1 + u_2$$

($u_1 + u_2$ essendo il modulo dell'algebra), si ricavano le relazioni:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_1\xi_2}, \quad \xi_4' = -\frac{\xi_3}{\xi_1\xi_2^2}.$$

Si hanno così le equazioni della trasformazione birazionale dell'S_4 legata all'algebra. Esse in coordinate omogenee si scrivono:

$$\xi_1' = \xi_2^2\xi_3, \quad \xi_2' = \xi_1\xi_2\xi_3, \quad \xi_3' = -\xi_3\xi_1\xi_3, \quad \xi_4' = -\xi_1\xi_3\xi_3, \quad \xi_5' = \xi_1\xi_3^2.$$

Indicando al solito con C_i il punto dell'S_5 che ha non nulla la sola coordinata i-ma ($i = 1, \ldots, 5$), le ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani in tale trasformazione sono quelle d'ordine 3 aventi come doppie le rette C_1C_3, C_3C_4, come doppio il punto C_3 ed ammettenti in C_4 i due S_3 tangenti $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$, il cui piano comune $C_2C_3C_4$ appartiene ad esse.

Cioè: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all'algebra* A_2, *agli iperpiani corrispondono le ipersuperficie cubiche che hanno come doppi due rette tra loro complanari ed un punto fuori del piano di queste, ammettono come tangenti in un punto di una* m *delle due rette doppie due dati* S_3 *uno dei quali passa per il punto doppio e contengono il piano comune a questi* S_3 *(distinto dal piano delle due rette doppie).*

Si noti che dette ipersuperficie ammettono nel punto C_3 i due S_3 tangenti $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$, l'ultimo dei quali le tocca in ogni punto semplice del

piano $C_1C_3C_4$; ogni ipersuperficie ammette inoltre in un punto generico della retta C_3C_4 due S_3 tangenti, uno dei quali è $\xi_3 = 0$ (mentre l'altro varia col punto e con la ipersuperficie), e lungo la retta C_1C_3 l'S_3 tangente $\xi_1 = 0$.

Due ipersuperficie Γ_1 e Γ_2 hanno in comune una V_2^9 della quale fanno parte il piano $C_1C_3C_4$ contato due volte, ed i piani $C_1C_3C_5$, $C_3C_4C_5$, $C_4C_3C_5$. Rimane una V_2^4, che indichiamo con φ, la quale contiene semplicemente le rette C_1C_3, C_3C_4, C_4C_5 (che sono rispettivamente quadrupla, quintupla, doppia per la completa intersezione di Γ_1 e Γ_2) ed ammette come doppi i punti C_4, C_5 (rispettivamente 6-plo e 4-plo per detta completa intersezione). Essa ammette come tangenti in C_3 il piano $C_1C_3C_4$, in C_4 due piani, di cui uno è $C_2C_3C_4$ e l'altro appartiene all'S_3 $\xi_1 = 0$ [1]), in un punto della retta C_3C_4 un piano (variabile col punto) appartenente all'S_3 $\xi_3 = 0$ e lungo la retta C_4C_5 un piano appartenente all'S_3 $\xi_1 = 0$.

Con procedimento analogo a quello seguito per l'algebra precedente, si dimostra che la superficie φ ha una retta p, uscente da C_3, nel piano $C_1C_3C_5$ ed una retta q, uscente da C_4, nel piano $C_2C_3C_4$ [2]).

Essa seca una terza ipersuperficie Γ_3 del sistema in una V_4^{12}, per la quale i punti C_4 e C_5 hanno rispettivamente le multiplicità 7 e 4 e della quale fanno parte le rette C_1C_3 contata due volte, C_3C_4 contata tre volte, C_4C_5 contata due volte e le rette p, q.

Rimane una V_1^3, che indichiamo con f, la quale passa per i punti C_4, C_5 ed ammette come tangente in C_4 una retta appartenente al piano $C_2C_3C_4$ [3]); essa si appoggia inoltre in un punto Q alla retta C_1C_3 [4]).

---

[1]) Ciò si ottiene subito osservando che, se

$$(11)\qquad \begin{aligned} &a_1\xi_2^2\xi_3 + b_1\xi_1\xi_2\xi_3 + c_1\xi_2\xi_3\xi_5 + d_1\xi_1\xi_4\xi_5 + f_1\xi_1\xi_2^2 = 0 \\ &a_2\xi_2^2\xi_3 + b_2\xi_1\xi_2\xi_3 + c_2\xi_2\xi_3\xi_5 + d_2\xi_1\xi_4\xi_5 + f_2\xi_1\xi_2^2 = 0 \end{aligned}$$

sono le equazioni di Γ_1 e Γ_2, quelle della superficie φ si possono ottenere facendo due combinazioni lineari delle (11), una secondo i numeri f_2, $-f_1$ e l'altra secondo i numeri d_2, $-d_1$. Prescindendo dai fattori ξ_3 e ξ_2, si hanno le equazioni di φ, che risultano del tipo:

$$(12)\qquad \begin{cases} \alpha_1\xi_2^2 + \beta_1\xi_1\xi_2 + \gamma_1\xi_3\xi_5 + \delta_1\xi_1\xi_4 = 0 \\ \alpha_2\xi_2\xi_3 + \beta_2\xi_1\xi_5 + \gamma_2\xi_3\xi_5 + \delta_2\xi_1\xi_2 = 0. \end{cases}$$

[2]) Ciò risulta, del resto, direttamente dalle equazioni (12) di φ.

[3]) Infatti, lo spazio di tale cubica seca φ in f e nella retta C_4C_5; esso seca i due piani tangenti φ in C_4, i quali sono $C_2C_3C_4$ ed il piano $\xi_4 = 0$, $\alpha_2\xi_2 + \gamma_2\xi_5 = 0$ [vedasi nota [1])], rispettivamente in una retta r e nella retta C_4C_5. Ne segue che f ammette come tangente in C_4 la retta r.

[4]) Un punto comune ad f ed alla retta C_1C_3 deve essere triplo per la totale intersezione di φ con Γ_3 e quindi deve essere tale che in esso il piano tangente a φ appartenga alla V_3^2 tangente a Γ_3. Viceversa, esclusi i punti C_3 e $B \equiv p \,.\, C_1C_3$, per i quali tale circostanza si verifica, un punto della retta C_1C_3 in cui il piano

Tale cubica seca una quarta ipersuperficie Γ_4 del sistema in 9 punti, dei quali 4 coincidono con C_1 (perchè la tangente ad f in C_1 appartiene ad entrambi gli S_3 tangenti a Γ_4 in questo punto), 2 con C_3, 2 col punto Q.

È verificato così che quattro ipersuperficie del sistema hanno in comune un sol punto variabile.

6. Consideriamo l'algebra A_6 avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	0	0	u_4
u_2	0	u_2	u_3	0
u_3	u_3	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0

Se $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è un suo elemento, la sua matrice sinistra è data da:

---

tangente a φ appartiene alla V_3^2 tangente a Γ_3, è certamente un punto di f. Per cercare punti siffatti, osserviamo che, se

$$a_3\xi_2^3\xi_3 + b_3\xi_1\xi_2\xi_3\xi_3 + c_3\xi_2\xi_3\xi_3\xi_3 + d_3\xi_1\xi_3\xi_3 + f_3\xi_1\xi_2^2 = 0$$

è l'equazione di Γ_3, si ha che in un punto $D(\mu, 0, 1, 0, 0)$ della retta C_1C_3, Γ_3 ammette come tangente la V_3^2:

$$f_3\mu\xi_2^2 + (b_3\mu + c_3)\xi_2\xi_3 + d_3\mu\xi_1\xi_3 = 0 \tag{13}$$

e φ, le cui equazioni sono date dalle (12), ammette il piano tangente:

$$\begin{cases} (\beta_1\mu + \gamma_1)\xi_2 + \delta_1\mu\xi_4 = 0 \\ \delta_2\mu\xi_3 + (\beta_2\mu + \gamma_2)\xi_3 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Per $\mu = 0$, D coincide con C_3; per $\mu = -\frac{\gamma_2}{\beta_2}$, D coincide col punto B ed in esso il piano tangente a φ è $C_1C_3C_3$ [appartenente alla V_3^2 di equazione (13)]. Per vedere se esistono altri valori di μ per i quali il piano di equazioni (14) appartiene alla V_3^2 di equazione (13), ricaviamo dalle (14):

$$\xi_4 = -\frac{\beta_1\mu + \gamma_1}{\delta_1\mu}\xi_2, \qquad \xi_3 = -\frac{\delta_2\mu}{\beta_2\mu + \gamma_2}\xi_3$$

e sostituendo nella (13):

$$\frac{f_3\delta_1\mu(\beta_2\mu + \gamma_2) - \delta_1\delta_2\mu(b_3\mu + c_3) + d_3\delta_2\mu(\beta_1\mu + \gamma_1)}{\delta_1(\beta_2\mu + \gamma_2)}\xi_2^2 = 0.$$

Perchè questa sia un'identità rispetto a ξ_2, deve essere (escludendo il caso $\mu = 0$):

$$f_3\delta_1(\beta_2\mu + \gamma_2) - \delta_1\delta_2(b_3\mu + c_3) + d_3\delta_2(\beta_1\mu + \gamma_1) = 0.$$

In corrispondenza al valore μ che soddisfa a quest'equazione, si ha un punto Q, della retta C_1C_3, appartenente alla cubica f.

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \xi_4 \\ 0 & 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{Vmatrix};$$

i divisori dello zero dell'algebra sono dunque gli elementi per i quali si ha $\xi_1 = 0$, ovvero $\xi_2 = 0$.

Indicando con x' l'inverso di x, deve essere:

$$xx' = u_1 + u_2,$$

onde, posto $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$, poichè:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + \xi_2\xi_2' u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1') u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_4\xi_1') u_4,$$

si hanno le relazioni:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_1\xi_2}, \quad \xi_4' = -\frac{\xi_4}{\xi_1\xi_2},$$

che rappresentano, in un S_4 complesso, la trasformazione cremoniana legata all'algebra e che in coordinate omogenee sono:

$$\xi_1' = \xi_1\xi_5, \quad \xi_2' = \xi_2\xi_5, \quad \xi_3' = -\xi_3\xi_5, \quad \xi_4' = -\xi_4\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1\xi_2.$$

Le ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani in questa trasformazione sono iperquadriche contenenti il punto $C_5(0,0,0,0,1)$ ed i piani $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ e $\xi_1 = 0$, $\xi_4 = 0$; esse sono per conseguenza S_0-coni i cui vertici appartengono alla retta C_3C_4 comune a detti piani [1]) e che ammettono lungo questa retta l'iperpiano $\xi_5 = 0$ come tangente.

Cioè: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all'algebra* A_6, *il sistema delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani è costituito dagli* S_0*-coni quadrici aventi in comune due piani cospaziali (passanti per i loro vertici) ed un punto fuori dello spazio da questi piani determinato.*

Che un tal sistema sia omaloidico, si dimostra facilmente: due iperquadriche di esso hanno in comune una V_3^4 spezzata nei due piani base ed in una quadrica φ passante per C_5 ed avente una retta g in uno dei piani base

---

[1]) Al solito, indichiamo con C_i $(i = 1, \ldots, 5)$ il punto dell'S_4 avente non nulla solo la i-ma coordinata omogenea. Se $a\xi_1\xi_5 + b\xi_2\xi_5 + c\xi_3\xi_5 + d\xi_4\xi_5 + f\xi_1\xi_2 = 0$ è l'equazione di una generica di dette iperquadriche, il vertice ne è il punto $(0, 0, -d, c, 0)$.

ed una retta d nell'altro; φ seca una terza iperquadrica del sistema in una V_1' della quale fanno parte g e d e che è dunque ulteriormente costituita da una conica f, passante per C_3 ed avente un punto M in g ed uno N in d; infine, f seca una quarta ipersuperficie del sistema in 4 punti, dei quali tre sono C_3, M, N. Quattro ipersuperficie del sistema hanno dunque un sol punto variabile in comune.

7. Consideriamo l'algebra A_4 avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	0	u_3	0
u_2	0	u_2	0	u_4
u_3	u_3	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \xi_4 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 \end{Vmatrix}.$$

quindi i divisori dello zero dell'algebra sono gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$, ovvero $\xi_2 = 0$.

Indicato con $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ l'inverso di x, deve essere:

$$xx' = u_1 + u_2,$$

e poichè:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + \xi_1\xi_2' u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1') u_3 + (\xi_2\xi_4' + \xi_4\xi_2') u_4,$$

si hanno le equazioni della trasformazione birazionale dell'S_4, immagine della funzione inversa nell'algebra:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_1^2}, \quad \xi_4' = -\frac{\xi_4}{\xi_2^2}.$$

Esse in coordinate omogenee si scrivono:

$$\xi_1' = \xi_1\xi_2\xi_3, \quad \xi_2' = \xi_1^2\xi_2\xi_4, \quad \xi_3' = -\xi_2^2\xi_3\xi_4, \quad \xi_4' = -\xi_1^2\xi_3\xi_4, \quad \xi_5' = \xi_1^2\xi_2^2.$$

Indichiamo al solito con $C_i (i = 1, \ldots, 5)$ il punto dell'S_4, avente non nulla solo la i-ma coordinata omogenea.

Le ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani in questa trasformazione sono quelle d'ordine 4 caratterizzate dall'avere come tripli il punto C_5 e la retta C_3C_4 (e quindi come doppio il piano $C_3C_4C_5$), come doppie le rette C_1C_3 e C_2C_4 e dall'ammettere come tangenti in C_3 gli iperpiani $\xi_2 = 0$ contato due volte e $\xi_3 = 0$ ed in C_4 gli iperpiani $\xi_4 = 0$ contato due volte e $\xi_1 = 0$.

Cioè: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all'algebra* A_7, *il sistema delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani è costituito dalle ipersuperficie d'ordine 4 aventi come tripli un punto ed una retta non appartenentisi, come doppie due rette che si appoggiano alla retta tripla in punti distinti ed appartengono ad un* S_3 *non contenente il punto triplo; in ciascuno dei punti in cui le rette doppie si appoggiano alla retta tripla, queste ipersuperficie ammettono come tangenti l'* S_3 *determinato dalle due rette doppie e l'* S_3 *determinato dalla retta doppia passante per il punto considerato, dalla retta tripla e dal punto triplo, quest'ultimo* S_3 *contato due volte.*

Dette ipersuperficie contengono, per conseguenza, oltre al piano doppio $C_3C_4C_5$, i piani $C_1C_3C_4$, $C_2C_3C_4$, $C_1C_3C_5$, $C_2C_4C_5$.

In un punto generico $(0, 0, \xi_3', \xi_4', 0)$ della retta tripla C_3C_4, esse ammettono come tangenti l'S_3 $\xi_5 = 0$, che tocca ogni ipersuperficie in ciascun punto dei piani $C_1C_3C_4$, $C_2C_3C_4$, ed altri due S_3 variabili col punto e con la ipersuperficie. Questi, per un'ipersuperficie generica del sistema, la cui equazione indichiamo con:

$$(15) \qquad a\xi_1\xi_2^2\xi_5 + b\xi_1^2\xi_1\xi_5 + c\xi_2^2\xi_3\xi_5 + d\xi_1^2\xi_1\xi_5 + f\xi_1^2\xi_2^2 = 0,$$

hanno l'equazione complessiva:

$$a\xi_1'\xi_1'^2 + c\xi_3'\xi_2'^2 = 0.$$

Inoltre, le ipersuperficie ammettono come tangenti lungo la retta C_3C_5 l'S_3 $\xi_2 = 0$, contato due volte, e lungo la retta C_4C_5 l'S_3 $\xi_1 = 0$, contato due volte.

Due ipersuperficie Γ_1 e Γ_2 si secano in una V_2^{16}, per la quale la retta C_3C_4 ha la multiplicità 10, le rette C_3C_5, C_4C_5 la multiplicità 6, le rette C_1C_3, C_2C_4 la multiplicità 4, i punti C_3, C_4 la multiplicità 12, il punto C_5 la multiplicità 9 e della quale fanno parte i piani $C_3C_4C_5$, contato 4 volte, $C_1C_3C_4$, contato 2 volte, $C_2C_3C_4$, contato 2 volte ed i piani $C_1C_3C_5$, $C_2C_4C_5$.

Rimane una V_2^6, che indicheremo con φ; essa ammette come doppia la retta C_3C_4, come semplici le rette C_3C_5, C_4C_5, C_1C_3, C_2C_4, come tripli i punti C_3, C_4, C_5. Ammette come tangenti in un punto generico della retta

C_1C_4 due piani appartenenti all'S_3 $\xi_1 = 0$ [1]; nel punto C_1 il piano $C_1C_3C_4$ contato due volte ed il piano $C_1C_3C_5$; in C_4 il piano $C_2C_3C_4$ contato due volte ed il piano $C_2C_4C_5$ [2]; lungo la retta C_3C_5 un piano appartenente all'S_3 $\xi_2 = 0$; lungo la retta C_4C_5 un piano appartenente all'S_3 $\xi_3 = 0$.

Questa superficie φ seca una terza ipersuperficie Γ_3 del sistema in una curva d'ordine 24, per la quale i punti C_3, C_4 hanno la multiplicità 15, il punto C_5 la multiplicità 9 e della quale fanno parte la retta C_3C_4 contata 8 volte, le rette C_3C_5, C_4C_5, ciascuna contata 4 volte e le rette C_1C_3, C_2C_4, ciascuna contata 2 volte. Rimane una curva f, d'ordine 4, passante semplicemente per i punti C_1, C_4, C_5. Essa ammette come tangente in C_1 la retta C_1C_3 ed in C_4 la retta C_2C_4 [3].

---

[1]) Se indichiamo con

$$a_1\xi_1\xi_4^2\xi_5 + b_1\xi_1^2\xi_4\xi_5 + c_1\xi_3^2\xi_4\xi_5 + d_1\xi_1^2\xi_4\xi_5 + f_1\xi_4^2\xi_5^2 = 0$$
$$a_2\xi_1\xi_2^2\xi_5 + b_2\xi_1^2\xi_2\xi_5 + c_2\xi_2^2\xi_3\xi_5 + d_2\xi_2^2\xi_4\xi_5 + f_2\xi_1^2\xi_2^2 = 0$$

le equazioni di Γ_1 e Γ_2 rispettivamente, combinando linearmente una volta secondo i numeri f_2, $-f_1$ ed una volta secondo i numeri d_2, $-d_1$, si ottengono due equazioni, le quali, trascurando i fattori ξ_5 e ξ_2, sono del tipo:

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha_1\xi_1\xi_4^2 + \beta_1\xi_1^2\xi_2 + \gamma_1\xi_2^2\xi_3 + \delta_1\xi_1^2\xi_4 = 0 \\ \alpha_2\xi_1\xi_2\xi_3 + \beta_2\xi_1^2\xi_5 + \gamma_2\xi_4\xi_3\xi_5 - \delta_2\xi_1^2\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Il sistema da esse formato rappresenta una superficie costituita dai piani $C_3C_4C_5$, contato due volte, $C_2C_4C_5$ e dalla superficie φ.

In un punto M $(0, 0, \xi_3', \xi_4', 0)$ della retta C_3C_4, l'ipersuperficie rappresentata dalla 1ª delle (16) ammette come tangenti i due S_3 di equazione complessiva:

$$\delta_1\xi_4'\xi_1^2 + \gamma_1\xi_3'\xi_2^2 = 0$$

e quella rappresentata dalla 2ª delle (16) ammette come tangenti i due S_3 $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$. Ne segue che φ ammette come tangenti in M i due piani rappresentati complessivamente dalle equazioni:

$$\begin{cases} \xi_3 = 0 \\ \delta_1\xi_4'\xi_1^2 + \gamma_1\xi_3'\xi_2^2 = 0. \end{cases}$$

[2]) In C_4 ad es., la superficie ψ rappresentata dalle equazioni (16), di cui φ è parte, ammette come tangenti i piani $C_3C_4C_5$, $C_2C_4C_5$, $C_2C_3C_4$, ciascuno contato due volte. Escludendo da questi i piani che appartengono a ψ, e cioè $C_2C_4C_5$ e $C_3C_4C_5$, quest'ultimo contato due volte, si conclude che i piani tangenti φ in C_4 sono $C_2C_4C_5$ e $C_2C_3C_4$ contato due volte. Analogamente si proceda per il punto C_3.

[3]) Per dimostrare che ad es. la retta C_1C_3 è tangente ad f in C_3, basta verificare che dei quattro punti in cui un S_3 generico condotto per C_1C_3 seca questa quartica due coincidono con C_3. Infatti, se Σ è un siffatto S_3, esso seca φ in una curva d'ordine 6, spezzata nella retta C_1C_3 ed in una quintica la quale ha in C_3

L'intersezione di f con una quarta ipersuperficie del sistema è costituita da 16 punti, dei quali 6 coincidono con C_3, 6 con C_4, 3 con C_5. Esiste dunque un sol punto variabile comune a quattro ipersuperficie generiche del sistema.

8. Si consideri l'algebra A_8 avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	0	0	0
u_2	0	u_2	u_3	u_4
u_3	0	u_3	0	0
u_4	0	u_4	0	0

Un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ ha per matrice (sinistra o destra):

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 \end{Vmatrix}$$

ed è quindi un divisore dello zero se è non nullo e sodisfa ad una delle relazioni:

$$\xi_1 = 0. \qquad \xi_2 = 0.$$

Se vogliamo che il prodotto di x per un altro elemento $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ dell'algebra sia eguale al modulo $u_1 + u_2$, poichè:

$$xx' = \xi\,\xi_1' u_1 + \xi_1 \xi_2' u_2 + (\xi\,\xi_3' + \xi_2 \xi_3') u_3 + (\xi\,\xi_4' + \xi_1 \xi_3') u_4,$$

debbono essere sodisfatte le relazioni:

$$\xi_1 \xi_1' = 1, \quad \xi_1 \xi_2' = 1, \qquad \xi_2 \xi_3' + \xi_3 \xi_2' = 0, \qquad \xi_3 \xi_4' + \xi_4 \xi_2' = 0,$$

che rappresentano la trasformazione cremoniana, dell' S_4, immagine della

---

una cuspide con la tangente $C_4 C_3$ e passa per il punto $P \equiv C_3 C_4 . \Sigma$ e per il punto $Q \equiv C_4 C_5 . \Sigma$, dove ammette come tangente una retta appartenente all' S_3 $\xi_4 = 0$; questa quintica ha in comune con Γ_3 20 punti dei quali 12 coincidono con C_3, 2 con P, 4 con Q. Restano 2 punti, che sono quelli in cui Σ seca f, oltre C_3.

funzione inversa legata all' algebra. Risolte rispetto alle ξ_i', esse si scrivono

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_2^2}, \quad \xi_4' = -\frac{\xi_4}{\xi_2^2}$$

ed, in coordinate omogenee:

$$\xi_1' = \xi_2^1 \xi_3, \quad \xi_2' = \xi_1 \xi_2 \xi_3, \quad \xi_3' = -\xi_1 \xi_3 \xi_3 \quad \xi_4' = -\xi_1 \xi_4 \xi_3, \quad \xi_3' = \xi_1 \xi_2^2.$$

Le ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani in questa trasformazione sono quelle d'ordine 3 caratterizzate dall'avere come doppi la retta C_3C_4 ed i punti C_1, C_3, dall'ammettere come tangenti lungo C_3C_4 i due iperpiani $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ e dal contenere il piano $C_2C_3C_4$ a questi comune.

Cioè: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all' algebra* A_3, *il sistema delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani è costituito dalle ipersuperficie d'ordine 3 aventi come doppia una data retta, lungo la quale ammettono come tangenti due dati* S_3 Σ_1, Σ_2, *il cui piano comune* π *appartiene ad esse e come doppi due dati punti, uno in* Σ_1 *e l' altro in* Σ_2, *non appartenenti con* π *ad uno stesso* S_3.

Si noti che queste ipersuperficie sono degli S_0-coni con i vertici appartenenti alla retta C_3C_4. Precisamente, se indichiamo con:

$$a\xi_1^2\xi_3 + b\xi_1\xi_2\xi_3 + c\xi_1\xi_3\xi_3 + d\xi_1\xi_4\xi_3 + f\xi_1\xi_2^2 = 0$$

l' equazione della generica ipersuperficie Γ del sistema, il vertice di questa è il punto $V(0, 0, -d, c, 0)$; Γ ammette inoltre come doppie le due rette che congiungono V con i punti C_1 e C_3.

Le ipersuperficie contengono inoltre la retta C_1C_3 ed, oltre al piano $\pi \equiv C_1C_3C_4$, i piani $C_1C_2C_4$, lungo il quale ammettono come tangente l' S_3 $\xi_3 = 0$, e $C_3C_2C_4$, lungo il quale ammettono come tangente l' S_3 $\xi_1 = 0$.

Due ipersuperficie Γ_1 e Γ_2 si secano in una V_3^2 per la quale la retta C_3C_4 ha la multiplicità 6, la retta C_1C_3 la multiplicità 1, i punti C_1, C_3 ciascuno la multiplicità 4 e della quale fanno parte i piani $C_1C_3C_4$, $C_3C_3C_4$, ciascuno contato due volte ed il piano $C_2C_3C_4$. Rimane una superficie φ di ordine 4, per la quale le rette C_3C_4, C_1C_3 sono semplici ed i punti C_1, C_3 doppi. Essa ammette lungo C_3C_4 il piano $C_2C_3C_4$ come tangente ed ha una retta m, uscente da C_1, nel piano $C_1C_3C_4$ ed una retta n, uscente da C_3, nel piano $C_3C_3C_4$; ammette come tangenti lungo m un piano appartenente all' S_3 $\xi_3 = 0$ e lungo n un piano appartenente all' S_3 $\xi_1 = 0$ [1].

---

[1]) Un S_3 condotto per il piano $C_1C_3C_4$ seca ciascuna delle due ipersuperficie Γ_1, Γ_2, oltre che in detto piano, in un cono quadrico, avente il vertice in un punto della retta C_3C_4, contenente questa retta ed ammettente lungo essa come tangent il piano intersezione dell' S_3 considerato con l' S_3 $\xi_1 = 0$. Si hanno così due con quadrici, i quali hanno in comune la retta C_3C_4, contata due volte, ed una conica

Questa superficie seca una terza ipersuperficie Γ_3 del sistema in una V_4^{12} per la quale i punti C_1. C_3 hanno la multiplicità 4 e della quale fanno parte le rette C_3C_4, contata 4 volte, m, n, ciascuna contata 2 volte, e la retta C_1C_5. Rimane una cubica f, passante per C_1 e C_5, la quale si appoggia alla retta C_3C_4 in un punto P [1]). Essa seca una quarta ipersuperficie Γ_4 del sistema in 9 punti, dei quali 4 coincidono con P (perchè f ammette evidentemente come tangente in P una retta del piano $C_1C_3C_4$. comune ai due S_3 tangenti a Γ_4 in detto punto), 2 con C_4, 2 con C_5. È così dimostrato che quattro ipersuperficie generiche del sistema hanno un sol punto variabile in comune.

9. Si consideri l'algebra A_9 avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	0	u_3	u_4
u_2	0	u_2	0	0
u_3	0	u_3	0	0
u_4	0	u_4	0	0

(passante per C_4); questa rappresenta la curva che, fuori del piano $C_1C_3C_4$, la superficie φ ha nell' S_3 considerato. Segue che φ, dovendo essere secata da questo S_3 in una quartica avente C_1 come doppio, ha nel piano $C_1C_3C_4$ una conica passante per C_4 e poichè di questa fa parte la retta C_3C_4. resta una retta m passante per C_1.

Analogamente si dimostra che φ ha una retta n, uscente da C_5, nel piano $C_3C_3C_4$.

Alle stesse conclusioni si perviene osservando che, se:

$$(17)\qquad \begin{aligned} &a_1\xi_2{}^2\xi_5+b_1\xi_1\xi_2\xi_5+c_1\xi_4\xi_3\xi_5+d_1\xi_1\xi_4\xi_5+f_1\xi_1\xi_2{}^2=0\\ &a_2\xi_2{}^2\xi_5+b_2\xi_3\xi_1\xi_5+c_2\xi_1\xi_3\xi_5+d_2\xi_1\xi_4\xi_5+f_2\xi_1\xi_2{}^2=0 \end{aligned}$$

sono le equazioni di Γ_4 e Γ_2, le equazioni di φ si possono scrivere nella forma:

$$\begin{cases} \alpha\xi_2{}^2+\beta\xi_1\xi_2+\gamma\xi_4\xi_2+\delta\xi_1\xi_4=0\\ \alpha'\xi_2\xi_5+\beta'\xi_3\xi_5+\gamma'\xi_4\xi_5-\alpha\xi_2{}^2=0 \end{cases}$$

(combinando linearmente le (17) secondo i numeri f_2, $-f_1$ una prima volta ed a_2, $-a_1$ una seconda volta). Si ottiene subito che φ ha nel piano $C_1C_3C_4$ la retta m di equazione $\gamma\xi_3+\delta\xi_4=0$, lungo la quale ammette come tangente il piano:

$$\beta\xi_2+\gamma\xi_3+\delta\xi_4=0,\qquad \xi_5=0,$$

e nel piano $C_3C_4C_5$ la retta n di equazione $\beta'\xi_3+\gamma'\xi_4=0$, lungo la quale ammette come tangente il piano:

$$\alpha'\xi_2+\beta'\xi_3+\gamma'\xi_4=0,\qquad \xi_1=0.$$

[1]) Infatti, lo spazio di f seca φ in questa cubica e nella retta C_1C_5; f dovrà quindi passare per il punto in cui detto spazio incontra la retta C_3C_4 (che appartiene a φ).

Il suo modulo è $u_1 + u_2$.

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è data da:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{Vmatrix}$$

I divisori dello zero dell'algebra sono quindi gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$, ovvero $\xi_2 = 0$.

Se indichiamo con $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ l'inverso di x, dà:

$$xx' = u_1 + u_2,$$

poiché:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + \xi_1\xi_2' u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_2') u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_4\xi_2') u_4,$$

si ricavano le equazioni:

$$\xi_1\xi_1' = 1, \qquad \xi_2\xi_2' = 1, \qquad \xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_2' = 0, \qquad \xi_1\xi_4' + \xi_4\xi_2' = 0.$$

La trasformazione cremoniana legata a quest'algebra è la stessa di quella legata all'algebra A_6.

10. Consideriamo l'algebra A_{10} avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	0	u_3	0
u_2	0	u_2	0	u_4
u_3	0	u_3	0	0
u_4	0	u_4	0	0

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è data da:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 \end{Vmatrix}.$$

I divisori dello zero sono gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$ ovvero $\xi_2 = 0$.

L'inverso $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ di x deve sodisfare alla relazione:

$$xx' = u_1 + u_2.$$

Poichè:

$$xx' = \xi\xi_1' u_1 + \xi\xi_2' u_2 + \xi\xi_3' u_3 + (\xi\xi_4' - \xi_1\xi_3') u_4,$$

si hanno le relazioni:

$$\xi_1\xi_1' = 1, \qquad \xi\xi_2' = 1, \qquad \xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1' = 0, \qquad \xi\xi_3' + \xi_3\xi_2' = 0.$$

La trasformazione cremoniana legata all'algebra coincide con quella legata all'algebra A_5.

11. Consideriamo l'algebra A_{11} avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	0	0	0
u_2	0	u_2	u_3	u_4
u_3	0	u_3	u_4	0
u_4	0	u_4	0	0

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è data da:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & 0 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 \end{Vmatrix}.$$

I divisori dello zero dell'algebra sono gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$, ovvero $\xi_2 = 0$.

L'inverso x' di x deve sodisfare alla relazione:

$$xx' = u_1 + u_2;$$

posto $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$, poichè:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + \xi_2\xi_2' u_2 + (\xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_2') u_3 + (\xi_2\xi_4' + \xi_3\xi_3' + \xi_4\xi_2') u_4,$$

si hanno le relazioni:

$$\xi_1\xi_1' = 1, \quad \xi_2\xi_2' = 1, \quad \xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_2' = 0, \quad \xi_2\xi_4' + \xi_3\xi_3' + \xi_4\xi_2' = 0,$$

dalle quali si ricavano le ξ_i' espresse mediante le ξ_i:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_2^2}, \quad \xi_4' = \frac{\xi_3^2 - \xi_2\xi_4}{\xi_2^3}.$$

Queste equazioni, che rappresentano nell' S_4 la trasformazione cremoniana immagine della funzione inversa nell' algebra considerata, in coordinate omogenee si scrivono:

$$\xi_1' = \xi_2^3\xi_5, \quad \xi_2' = \xi_1\xi_2^2\xi_5, \quad \xi_3' = -\xi_1\xi_2\xi_3\xi_5, \quad \xi_4' = \xi_1(\xi_3^2 - \xi_2\xi_4)\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1\xi_2^3.$$

Il sistema Σ formato dalle ipersuperficie corrispondenti, in questa trasformazione, agli iperpiani di S_4, ha l'equazione:

$$a\xi_2^3\xi_5 + b\xi_1\xi_2^2\xi_5 + c\xi_1\xi_2\xi_3\xi_5 + d\xi_1\xi_5(\xi_3^2 - \xi_2\xi_4) + f\xi_1\xi_2^3 = 0.$$

Esso è il sistema lineare ∞^4 *passante per l'ipersuperficie* Γ *di equazione:*

$$\xi_1\xi_5(\xi_3^2 - \xi_2\xi_4) = 0$$

e per il sistema lineare Σ' ∞^3 *di equazione:*

$$a\xi_2^3\xi_5 + b\xi_1\xi_2^2\xi_5 + c\xi_1\xi_2\xi_3\xi_5 + f\xi_1\xi_2^3 = 0.$$

Γ è costituita dagli iperpiani $\xi_1 = 0$, $\xi_5 = 0$ e dall'iperquadrica:

$$\xi_3^2 - \xi_2\xi_4 = 0,$$

la quale è un S_1-cono, avente per asse la retta C_1C_5, passante per i punti C_2, C_4 ed ammettente come tangenti l'S_3 $\xi_4 = 0$ lungo il piano $C_1C_2C_5$ e l'S_3 $\xi_2 = 0$ lungo il piano $C_4C_5C_5$.

Le ipersuperficie di Σ' si ottengono accoppiando l'S_3 $\xi_1 = 0$ alle ipersuperficie del sistema Σ'' di equazione:

$$a\xi_2^2\xi_5 + b\xi_1\xi_2\xi_5 + c\xi_1\xi_3\xi_5 + f\xi_1\xi_2^2 = 0, \tag{18}$$

costituito dagli S_0-coni cubici col vertice in C_4, aventi come doppie le rette C_1C_4, C_4C_5, C_5C_4, ammettenti come tangenti lungo quest'ultima i due iperpiani $\xi_1 = 0$, $\xi_5 = 0$ e contenenti il piano $C_2C_3C_4$ a questi comune.

Poichè la curva variabile comune a tre ipersuperficie indipendenti qual-

siasi di Σ'' è una retta uscente da C_4 ed ha un sol punto variabile in comune con Γ, *il sistema* Σ *è omaloidico* [1]).

12. Consideriamo l'algebra A_{12} avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	0	0	0
u_3	u_3	0	0	0
u_4	u_4	0	0	0

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è data da:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{Vmatrix}$$

i divisori dello zero dell'algebra sono quindi gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$.

Se con $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ indichiamo l'inverso di x, si ha:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1') u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1') u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_4\xi_1') u_4;$$

---

[1]) Cfr. MARLETTA G., *Alcuni sistemi omaloidici nell'* S_n (Rend. Circolo Mat. di Palermo, Tomo XLIX, 1925), & 3, n. 9.

Per dimostrare che è una retta uscente da C_4 la curva variabile comune a tre generiche ipersuperficie di Σ'', si osservi che queste ipersuperficie ammettono come tangenti l'S_3 $\xi_5 = 0$ lungo il piano $C_1C_3C_4$ e l'S_3 $\xi_1 = 0$ lungo il piano $C_3C_4C_5$; due di esse si secano quindi in una V_2^3, per la quale le rette C_1C_4, C_4C_5 hanno la multiplicità 4, la retta C_3C_4 la multiplicità 6 e della quale fanno parte i piani $C_1C_3C_4$, $C_3C_4C_5$, ciascuno contato 2 volte, ed i piani $C_1C_4C_5$, $C_2C_3C_4$. Rimane un cono cubico (col vertice in C_4), contenente le rette C_1C_4, C_3C_4, C_4C_5 ed ammettente come tangente lungo C_3C_4 il piano $C_2C_3C_4$; esso ha in comune con una terza ipersuperficie 9 rette, delle quali C_1C_4 e C_4C_5 contano ciascuna per 2, mentre C_3C_4 conta per 4, onde non rimane che una retta (uscente evidentemente da C_4). Del resto, si può osservare che l'equazione (18) rappresenta, nell'S_3 $\xi_4 = 0$, un sistema omaloidico σ di superficie [legato ad una delle cinque algebre complesse d'ordine 3, dotate di modulo; vedasi la mia nota citata a pag. 2, & 2, n. 4] e che Σ'' si ottiene proiettando σ da C_4. Ora, poichè tre superficie generiche di σ hanno un sol punto variabile in comune, così le tre ipersuperficie che le proiettano da C_4 hanno in comune una curva di cui la parte variabile è costituita dalla retta che congiunge detto punto con C_4.

perchè questo prodotto sia eguale al modulo u_1 dell'algebra, debbono essere sodisfatte le relazioni:

$$\xi_1\xi_1' = 1, \qquad \xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1' = 0, \qquad \xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1' = 0, \qquad \xi_1\xi_4' + \xi_4\xi_1' = 0,$$

cioè:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = -\frac{\xi_2}{\xi_1^2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_1^2}, \quad \xi_4' = -\frac{\xi_4}{\xi_1^2}.$$

Si ottengono così le equazioni della trasformazione cremoniana dell'S_4 legata all'algebra, equazioni che, in coordinate omogenee, si scrivono:

$$\xi_1' = \xi_1\xi_5, \qquad \xi_2' = -\xi_2\xi_5, \qquad \xi_3' = -\xi_3\xi_5, \qquad \xi_4' = -\xi_4\xi_5, \qquad \xi_5' = \xi_1^2.$$

Le ipersuperficie corrispondenti in questa trasformazione agli iperpiani di S_4 sono gli S_1-coni quadrici contenenti il punto C_5 ed il piano $C_2C_3C_4$, lungo il quale ammettono come tangente l'S_3 $\xi_5 = 0$ [1]).

Cioè: *nella trasformazione cremoniana dell'* S_4 *legata all' algebra* A_{12}, *il sistema delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani è costituito dagli* S_1*-coni quadrici aventi in comune un piano, ammettenti lungo questo lo stesso* S_3 *tangente e passanti per un dato punto fuori di questo* S_3.

Questo sistema è omaloidico. Infatti, due sue ipersuperficie Γ_1, Γ_2 si secano in una V_2^4 costituita dal piano $C_2C_3C_4$ contato due volte e da un cono quadrico φ, passante per C_5 ed avente in comune una retta g col piano $C_2C_3C_4$ (il vertice di φ è il punto comune alle rette doppie di Γ_1 e Γ_2). Questo cono seca una terza iperquadrica Γ_3 del sistema in una V_1^4 formata dalla retta g contata due volte (perchè il piano tangente a φ lungo g appartiene all'S_3 tangente a Γ_3 lungo la stessa retta) e da una conica f passante per C_5 ed avente un punto M in g. Detta conica seca una quarta ipersuperficie Γ_4 del sistema in 4 punti, dei quali uno è C_5 e due coincidono con M (perchè la tangente ad f in M appartiene all'S_3 tangente a Γ_4 nello stesso punto). Vi è dunque un sol punto variabile comune a quattro iperquadriche del sistema.

13. Si consideri l'algebra A_{13} avente la tabella di moltiplicazione:

---

[1]) Una generica di dette iperquadriche, la cui equazione indichiamo con:

$$a\xi_1\xi_5 + b\xi_2\xi_5 + c\xi_3\xi_5 + d\xi_4\xi_5 + f\xi_1^2 = 0,$$

ha come doppia la retta, del piano $C_2C_3C_4$, avente in questo piano l'equazione:

$$b\xi_2 + c\xi_3 + d\xi_4 = 0.$$

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	0	u_4	0
u_3	u_3	$-u_4$	0	0
u_4	u_4	0	0	0

.

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è data da:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & \xi_1 & 0 & -\xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{Vmatrix};$$

i divisori dello zero dell'algebra sono dunque gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$.

Dato un altro elemento $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ dell'algebra, il prodotto:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1')u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_3' - \xi_3\xi_2' + \xi_4\xi_1')u_4$$

è eguale al modulo u_4 se sono sodisfatte le relazioni:

$$\xi_1\xi_1' = 1, \quad \xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_3' - \xi_3\xi_2' + \xi_4\xi_1' = 0,$$

dalle quali si ricava:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = -\frac{\xi_2}{\xi_1^2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_1^2}, \quad \xi_4' = -\frac{\xi_4}{\xi_1^2}.$$

Queste equazioni coincidono con quelle trovate per l'algebra precedente, quindi la trasformazione cremoniana legata all'algebra A_{13} è la stessa di quella legata all'algebra precedente.

14. Consideriamo l'algebra A_{14} avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_4	0	0
u_3	u_3	0	0	0
u_4	u_4	0	0	0

.

La matrice sinistra (coincidente con la destra) di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è data da:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{Vmatrix};$$

i divisori dello zero sono quindi gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$.

Il prodotto di x per un altro elemento $x' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' u_i$ dell'algebra è dato da:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1')u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_2' + \xi_4\xi_1')u_4;$$

se x è l'inverso di x, dalla relazione $xx' = u_1$, si ricavano le formole:

$$\xi_1\xi_1' = 1, \quad \xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_3' + \xi_4\xi_1' = 0,$$

cioè:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = -\frac{\xi_2}{\xi_1^2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_1^2}, \quad \xi_4' = \frac{\xi_2^2 - \xi_1\xi_4}{\xi_1^3}.$$

Queste equazioni che, in un S_4, rappresentano la trasformazione cremoniana immagine della funzione inversa legata all'algebra, in coordinate omogenee, si scrivono:

$$\xi_1' = \xi_1^3\xi_5, \quad \xi_2' = -\xi_1\xi_2\xi_5, \quad \xi_3' = -\xi_1\xi_3\xi_5, \quad \xi_4' = (\xi_2^2 - \xi_1\xi_4)\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1^3.$$

Il sistema Σ *delle ipersuperficie corrispondenti, in questa trasformazione, agli iperpiani di* S_4 *ha l'equazione:*

$$a\xi_1^2\xi_5 + b\xi_1\xi_2\xi_5 + c\xi_1\xi_3\xi_5 + d(\xi_2^2 - \xi_1\xi_4)\xi_5 + f\xi_1^3 = 0.$$

ed è il sistema lineare ∞^4 *passante per l'ipersuperficie* Γ *di equazione:*

$$(\xi_2^2 - \xi_1\xi_4)\xi_5 = 0$$

e per il sistema lineare Σ' ∞^3 *di equazione:*

$$a\xi_1^2\xi_5 + b\xi_1\xi_2\xi_5 + c\xi_1\xi_3\xi_5 + f\xi_1^3 = 0.$$

Le ipersuperficie di Σ' si ottengono accoppiando l'iperpiano $\xi_1 = 0$ alle ipersuperficie del sistema Σ'' di equazione:

(19) $$a\xi_1\xi_5 + b\xi_2\xi_5 + c\xi_3\xi_5 + f\xi_1^2 = 0,$$

le quali sono gli S_4-coni quadrici contenenti il piano $C_2C_3C_4$, ammettenti come tangente lungo questo l'S_3 $\xi_5 = 0$, passanti per il punto C_5 ed aventi ciascuno come asse una retta (del piano $C_2C_3C_4$) uscente da C_4 (e variabile con l'S_4-cono).

Due di tali S_4-coni si secano nel piano $C_2C_3C_4$ contato due volte ed in un cono quadrico φ col vertice in C_4 e passante per C_3. Questo ha in comune con una terza ipersuperficie di Σ'' quattro generatrici, delle quali una è la retta C_4C_5 e due coincidono con la retta che esso ha nel piano $C_2C_3C_4$ (questa retta è da contare due volte, perchè lungo essa il piano tangente a φ appartiene all'S_3 $\xi_5 = 0$ tangente all'ipersuperficie considerata).

Concludiamo che la curva variabile comune a tre ipersuperficie generiche di Σ'' è una retta m uscente da C_4 [1]).

Con l'ipersuperficie Γ, costituita dall'iperpiano $\xi_5 = 0$ e da un S_4-cono quadrico, di equazione

$$\xi_2^2 - \xi_1\xi_4 = 0$$

(avente per asse la retta C_3C_5, passante per i punti C_1, C_4 ed ammettente come tangenti l'S_3 $\xi_4 = 0$ lungo il piano $C_1C_3C_5$ e l'S_3 $\xi_1 = 0$ lungo il piano $C_4C_3C_5$), tale retta m ha un sol punto variabile in comune.

È così dimostrato che il sistema Σ è omaloidico [2]).

15. Si consideri l'algebra A_{15} avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_4	0	0
u_3	u_3	0	u_4	0
u_4	u_4	0	0	0

.

La matrice sinistra (coincidente con la destra) di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i u_i$ è data da:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{Vmatrix};$$

[1]) Anche qui si può osservare che l'equazione (19) rappresenta nell'S_3 $\xi_5 = 0$ un sistema omaloidico σ di superficie [vedasi la mia nota citata a pag. 2, § 4, n. 9] e si può quindi ripetere quanto si è detto alla fine della nota di pag. 25.

[2]) Cfr. loc. cit. nella nota di pag. 25.

i divisori dello zero dell'algebra sono gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$.

Se $x' = \sum_{i=1}^{5} \xi_i' u_i$ è l'inverso di x, poichè:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1') u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1') u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_2' + \xi_3\xi_3' + \xi_4\xi_1') u_4, \qquad \text{da } xx' = u_1$$

si ricavano le relazioni:

$$\xi_1\xi_1' = 1, \quad \xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_2' + \xi_3\xi_3' + \xi_4\xi_1' = 0,$$

da cui:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = -\frac{\xi_2}{\xi_1^2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_1^2}, \quad \xi_4 = \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4\xi_1}{\xi_1^3}.$$

Si ottengono così le equazioni della trasformazione cremoniana dell'S_4 immagine della funzione inversa legata all'algebra. In coordinate omogenee, esse assumono la forma:

$$\xi_1' = \xi_1^2\xi_5, \quad \xi_2' = -\xi_1\xi_2\xi_5, \quad \xi_3' = -\xi_1\xi_3\xi_5, \quad \xi_4' = (\xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4\xi_1)\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1^3.$$

Le ipersuperficie corrispondenti in questa trasformazione agli iperpiani di S_4 costituiscono un sistema lineare Σ di equazione:

$$a\xi_1^2\xi_5 + b\xi_1\xi_4\xi_5 + c\xi_1\xi_3\xi_5 + d(\xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4\xi_1)\xi_5 + f\xi_1^3 = 0,$$

che è *il sistema* ∞^4 *passante per l'ipersuperficie* Γ *di equazione:*

$$(\xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4\xi_1)\xi_5 = 0$$

e per il sistema lineare Σ' ∞^3 *di equazione:*

$$a\xi_1^2\xi_5 + b\xi_1\xi_4\xi_5 + c\xi_1\xi_3\xi_5 + f\xi_1^3 = 0.$$

Questo coincide col sistema Σ' considerato per l'algebra precedente.

Quanto all'ipersuperficie Γ, essa è costituita dall'iperpiano $\xi_5 = 0$ e da un S_0-cono quadrico, col vertice in C_3, passante per i punti C_4, C_4, dove ammette come tangenti gli iperpiani $\xi_4 = 0$, $\xi_4 = 0$ rispettivamente (caratterizzato dalle condizioni suddette e dall'avere in comune con la retta C_2C_3 i punti rappresentati complessivamente, su questa retta, dall'equazione $\xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$).

Poichè la curva variabile comune a tre ipersuperficie generiche di Σ',

che è una retta uscente da C_4, ha in comune con Γ un sol punto variabile, il sistema è omaloidico [1]).

16. Si consideri l'algebra A_{16} avente la tabella di moltiplicazione [2]):

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_4	u_5	0
u_3	u_3	$-u_5$	λu_4	0
u_4	u_4	0	0	0

La matrice sinistra di un suo elemento $x = \sum_{i=1}^{5} \xi_i u_i$ è:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 - \xi_5 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_3 + \lambda\xi_5 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{Vmatrix};$$

i divisori dello zero sono gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1 = 0$.

L'inverso x' di x deve sodisfare alla relazione $xx' = u_1$; posto $x' = \sum_{i=1}^{5} \xi_i' u_i$, si ha:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1')u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_3' + \xi_4\xi_2' - \xi_3\xi_2' + \lambda\xi_3\xi_3' + \xi_4\xi_1')u_4;$$

ne seguono le relazioni:

$$\xi_1\xi_1' = 1, \quad \xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_3' + \xi_3\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_3' + \xi_4\xi_2' - \xi_3\xi_2' + \lambda\xi_3\xi_3' + \xi_4\xi_1' = 0,$$

dalle quali si ricava:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = -\frac{\xi_2}{\xi_1^2}, \quad \xi_3' = -\frac{\xi_3}{\xi_1^2}, \quad \xi_4' = \frac{\xi_2^2 + \lambda\xi_3^2 - \xi_1\xi_4}{\xi_1^3}.$$

Queste rappresentano la trasformazione cremoniana, dell' S_4, immagine della funzione inversa legata all'algebra. In coordinate omogenee, esse sono:

$$\xi_1' = \xi_1^3\xi_5, \quad \xi_2' = -\xi_1\xi_2\xi_5, \quad \xi_3' = -\xi_1\xi_3\xi_5, \quad \xi_4' = (\xi_2^2 + \lambda\xi_3^2 - \xi_1\xi_4)\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1^3.$$

---

[1]) Cfr. loc. cit. nella nota di pag. 25.

[2]) Questa tabella, nella mia nota citata a pag. 1, corrisponde al n. 17; per $\lambda = 0$, si ottiene la tabella che, sempre in detta nota, corrisponde al n. 16.

Il sistema Σ delle ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani in questa trasformazione ha l'equazione:

$$a\xi_1^2\xi_5+b\xi_1\xi_2\xi_5+c\xi_1\xi_3\xi_5+d(\xi_2^2+\lambda\xi_3^2-\xi_1\xi_4)\xi_5+f\xi_1^3=0.$$

Esso è il sistema lineare ∞^4 *passante per l'ipersuperficie* Γ *di equazione:*

$$\xi_5(\xi_2^2+\lambda\xi_3^2-\xi_1\xi_4)=0$$

e per il sistema lineare Σ' ∞^3 *di equazione:*

$$a\xi_1^2\xi_5+b\xi_1\xi_2\xi_5+c\xi_1\xi_3\xi_5+f\xi_1^3=0.$$

Tale sistema coincide col sistema Σ' considerato per l'algebra A_{14} (n. 14).

L'ipersuperficie Γ è costituita dall'iperpiano $\xi_5=0$ e da un S_0-cono quadrico col vertice in C_5, passante per i punti C_1, C_4, dove ammette come tangenti gli iperpiani $\xi_4=0$, $\xi_1=0$ rispettivamente, caratterizzato dalle condizioni suddette e dall'avere in comune con la retta C_2C_3 i punti rappresentati complessivamente, su questa retta, dall'equazione $\xi_2^2+\lambda\xi_3^2=0$.

Che il sistema Σ sia omaloidico si dimostra analogamente a come si è fatto per le due algebre precedenti A_{14} ed A_{15}.

Si noti che le trasformazioni cremoniane legate a queste due algebre coincidono con quella legata all'algebra considerata in questo n., rispettivamente per i valori $\lambda=0$ e $\lambda=1$ del parametro λ.

17. Si consideri l'algebra A_{17} avente la tabella di moltiplicazione:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_3	u_4	0
u_3	u_3	u_4	0	0
u_4	u_4	0	0	0

La matrice sinistra (coincidente con la destra) di un suo elemento $x=\sum_{i=1}^{4}\xi_i u_i$ è:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{Vmatrix};$$

i divisori dello zero dell'algebra sono quindi gli elementi non nulli per i quali si ha $\xi_1=0$.

L'inverso x' di x è determinato dalla relazione $xx' = u_4$; posto $x' = \sum_{i=1}^{5} \xi_i' u_i$, essendo:

$$xx' = \xi_1\xi_1' u_1 + (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')u_2 + (\xi_1\xi_3' + \xi_2\xi_2' + \xi_3\xi_1')u_3 + (\xi_1\xi_4' + \xi_1\xi_3' + \xi_2\xi_3' + \xi_4\xi_1')u_4.$$

ne seguono le relazioni:

$$\xi_1\xi_1' = 1. \quad \xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_3' + \xi_2\xi_2' + \xi_3\xi_1' = 0, \quad \xi_1\xi_4' + \xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_2' + \xi_4\xi_1' = 0,$$

da cui:

$$\xi_1' = \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2' = -\frac{\xi_2}{\xi_1^2}, \quad \xi_3' = \frac{\xi_2^2 - \xi_1\xi_3}{\xi_1^3}, \quad \xi_4' = \frac{-\xi_2^3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3 - \xi_1^2\xi_4}{\xi_1^4}.$$

Queste equazioni, che rappresentano, in un S_4, la trasformazione cremoniana immagine della funzione inversa legata all'algebra, in coordinate omogenee si scrivono:

$$\xi_1' = \xi_1^3\xi_5, \quad \xi_2' = -\xi_1^2\xi_2\xi_5, \quad \xi_3' = (\xi_2^2 - \xi_1\xi_3)\xi_1\xi_5, \quad \xi_4' = (-\xi_2^3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3 - \xi_1^2\xi_4)\xi_5, \quad \xi_5' = \xi_1^4.$$

Le ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani di S_4 in questa trasformazione costituiscono il sistema lineare Σ di equazione:

$$a\xi_1^3\xi_5 + b\xi_1^2\xi_2\xi_5 + c(\xi_2^2 - \xi_1\xi_3)\xi_1\xi_5 + d(2\xi_1\xi_2\xi_3 - \xi_2^3 - \xi_1^2\xi_4)\xi_5 + f\xi_1^4 = 0,$$

che è *il sistema* ∞^4 *passante per l'ipersuperficie* Γ *di equazione:*

$$(2\xi_1\xi_2\xi_3 - \xi_2^3 - \xi_1^2\xi_4)\xi_5 = 0$$

e per il sistema lineare Σ' ∞^3 *di equazione:*

$$a\xi_1^3\xi_5 + b\xi_1^2\xi_2\xi_5 + c(\xi_2^2 - \xi_1\xi_3)\xi_1\xi_5 + f\xi_1^4 = 0.$$

Le ipersuperficie di Σ' si ottengono accoppiando l'iperpiano $\xi_1 = 0$ alle ipersuperficie del sistema Σ'' di equazione:

$$a\xi_1^2\xi_5 + b\xi_1\xi_2\xi_5 + c\xi_2^2 - \xi_1\xi_3\xi_5 + f\xi_1^3 = 0, \tag{20}$$

il quale si ottiene proiettando da C_4 un sistema omaloidico σ di superficie appartenente all'S_3 $\xi_4 = 0$ [1]), onde la curva variabile comune a tre iper-

[1]) Questo sistema è stato considerato nella mia nota citata a pag. 2, § 5, n. 11.

superficie di Σ'' è una retta uscente da C_4 (la retta che congiunge C_4 col punto variabile comune alle tre superficie, di σ, sezioni delle tre ipersuperficie considerate con l'S_3 $\xi_4 = 0$).

L'ipersuperficie Γ è costituita dall'S_3 $\xi_5 = 0$ e da un S_0-cono cubico col vertice in C_5, avente come doppio il piano $C_3C_4C_5$ (e caratterizzato, oltre che da queste proprietà, dall'ammettere come tangenti lungo la retta C_3C_5 i due iperpiani $\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 0$, lungo la retta C_4C_5 l'iperpiano $\xi_4 = 0$ contato due volte, dal contenere il piano $C_1C_3C_5$ e dall'esser secato dal piano $C_1C_2C_5$ nella retta C_1C_5 contata tre volte).

Poichè la retta variabile comune a tre ipersuperficie generiche di Σ'' seca Γ in un sol punto distinto da C_4 (cioè in un sol punto variabile), il sistema Σ è omaloidico [1]).

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 gennaio 1948.

Assistono all'adunanza, presieduta dalla socia anziana Pᴀkunin, i soci ordinari Carnera, Carrelli, Colamonico, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Pierantoni, Spampinato ed i corrispondenti Imbò, Nobile, Pascal e Scherillo.

Il socio corrispondente Pascal legge la *Commemorazione di Roberto Marcolongo*, che verrà inserita nel Rendiconto insieme col ritratto e lo elenco delle pubblicazioni.

Il socio Spampinato presenta una sua nota dal titolo: *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice* n *nell'* S_r *proiettivo complesso.*

Il socio Carnera presenta una sua nota su *Le variazioni della latitudine ed il movimento di rotazione terrestre negli anni 1945 e 1946.*

Il socio Carrelli riferisce brevemente sui risultati esposti al Congresso della Società italiana di Fisica in Como relativi alle conoscenze sulla nuova particella fondamentale: il *mesone*. Mentre ricerche compiute sui raggi cosmici mediante contatori hanno assicurato la presenza e la instabilità della suddetta particella, permettendo anche di misurarne la durata media di vita, che si aggira sui 2 microsecondi, la nuova tecnica delle gelatine sensibili ha di molto accresciuto le nostre conoscenze sull'argomento, permettendo di giungere alla conclusione fondamentale dell'esistenza di almeno due particelle instabili di massa diversa, sempre intermedie fra quella dell'elettrone e quella del protone.

L'Accademia si riunisce quindi in seduta privata.

---

[1]) Loc. citato nella nota a pag. 25.

Processo verbale dell' adunanza del dì 7 febbraio 1948.

Presidenza della socia anziana Bakunin. Sono presenti i soci ordinari Carnera, De Dominicis, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Diamare, Malquori, Spampinato ed i corrispondenti Imbò e Scherillo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del 3 gennaio, che è approvato.

Il socio De Lorenzo crede di interpretare i pensieri dei colleghi, facendo associare il compianto dell' Accademia al cordoglio di tutto il mondo civile per la tragica morte del Mahâtma Gandhi: di questo piccolo uomo portentoso, non a torto paragonato, da quanti lo conobbero personalmente, a San Francesco d' Assisi; il quale ha posto i suoi principii morali e religiosi come base della redenzione ed elevazione dei popoli dell' India, dando un esempio nuovo ed unico, nella storia dell' umanità, pel miglioramento sociale e politico di tutti i popoli della terra. I suoi principii fondamentali erano: la purezza della vita, *brahmachariya*, e la non violenza o non nocenza, *ahimsâ*, appoggiate sull' attaccamento alla verità, *satyagraha*, e sostenute con la più illimitata pazienza e col più impavido coraggio, fino al sacrificio della propria vita. Ed egli, infatti, il predicatore della non violenza, è caduto serenamente sotto l' atto violento dei fanatici della *mahasabha*.

Due casi analoghi, in campi diversi, vi sono stati nella storia della umanità. Nel campo sociale e politico, « presso al tempo che tutto il ciel volle Ridur lo mondo a suo modo sereno », Giulio Cesare, quando, dopo le sue conquiste e vittorie, volle *pacis imponere morem*, fu trucidato dai suoi violenti senatori. Ma, dopo che il suo corpo cadde, lo spirito di Cesare, come dice Shakespeare, ha camminato e cammina per tutta la terra. Analogamente, nel campo religioso, il vangelo di carità e di amore, annunziato da Gesù, mentre era vivo, nella piccola Galilea, s' è diffuso, dopo che Egli fu fatto crocifiggere dai violenti farisei, su tutta la terra. Similmente c' è da ritenere, che dopo la morte del piccolo, gracile corpo di Gandhi, il suo grande spirito, Mahâtma, aleggerà su tutta la terra. I violenti, che pensano di far trionfare le loro idee, distruggendo gli effimeri corpi materiali di quei, che pensano diversamente, non sanno, che è l' impalpabile spirito quel che anima la pesante materia: *spiritus intus alit, mens agitat molem.*

Il socio Imbò presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *Conduttività termica approssimata per lave fluenti vesuviane*, ed un' altra *A proposito di un' analisi termica relativa a lava etnea del 1947.*

Il socio Scherillo riferisce sui primi risultati dello studio petrografico da lui compiuto sui campioni di lava dell' eruzione vesuviana del 1944, gentilmente fornitigli dal collega prof. Imbò e dal prof. Parascandola. Per quanto riguarda le colate laviche, non si nota nessuna notevole differenza rispetto alla composizione delle lave che erano state emesse negli anni precedenti

(p. es. nel 1940-41 e nel 1942), mentre invece i brandelli di magma coevo proiettati dalle ultime esplosioni sono molto più ricchi di CaO e di MgO. Infatti tali campioni sono molto più ricchi di pirosseno in confronto alle lave. Nel magma vesuviano si è quindi determinata una nettissima differenziazione.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 marzo 1948.

Sono presenti i soci ordinari Bakunin (che presiede l'adunanza), Carnera, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Pierantoni, Spampinato, ed i corrispondenti Imbò e Scherillo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del dì 7 febbraio, che è approvato. Indi presenta il volume del Rendiconto 1946-47, di cui è stata recentemente ultimata la stampa.

Il socio D'Erasmo presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *I Proboscidati fossili nello stato attuale della scienza,* e ne discorre.

Il socio Spampinato presenta, per lo stesso periodico, una nota del dott. Ulderico Bencivenga su *Di alcuni sistemi metrici nello spazio a tre dimensioni,* proponendone l'accoglimento per la stampa. L'Accademia unanime approva.

L'Accademia tratta quindi affari interni.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 aprile 1948.

Assistono all'adunanza, presieduta dalla socia anziana Bakunin, i soci ordinari Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Pierantoni, ed i corrispondenti Imbò, Nobile, Salfi e Scherillo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del dì 6 marzo, che è approvato. Indi comunica, con profondo dolore, che il giorno 16 dello scorso mese è mancato ai vivi, dopo una lunga vita di fecondo lavoro, il prof. Alfredo Lacroix, socio corrispondente straniero nella Sezione di Scienze naturali dal dì 14 marzo 1931, e ne ricorda brevemente le principali benemerenze scientifiche nel campo mineralogico e petrografico attestate da un formidabile complesso di più di mille pubblicazioni, fra le quali hanno soprattutto alto valore quelle rivolte alla conoscenza di minerali e rocce della Francia e delle sue colonie, alla illustrazione di particolari parossismi vulcanici (fra cui quello del M. Pelée nella Martinica del 1902 e quello del Vesuvio del 1906) e allo studio degli inclusi delle rocce vulcaniche. Dello eminente scienziato scomparso sarà tenuta degna commemorazione in altra adunanza, ad opera del socio Scherillo.

Indi l'Accademia si occupa di affari interni relativi alla sistemazione della sede.

Processo verbale dell' adunanza del dì 8 maggio 1948.

Presidenza della socia anziana Bakunin. Sono presenti i soci ordinari Carnera, Colamonico, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Malquori, Pierantoni, Spampinato ed il corrispondente Scherillo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del dì 3 aprile, che è approvato, e presenta le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, segnalando quelle offerte dai soci Colamonico e D'Erasmo. Indi legge l'invito dell'Università di Tucumàn a partecipare al *II Congresso Sud-americano di Botanica*, che avrà luogo in quella città dal 10 al 17 ottobre 1948 sotto il patronato del governo argentino. — L'Accademia dà la propria adesione, incaricandone il socio Longo.

Il socio corrispondente Scherillo legge la *Commemorazione del socio straniero Alfredo Lacroix*, da inserirsi nel Rendiconto.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una sua IV nota dal titolo: *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche d' indice* n, *dell'* S_r *proiettivo complesso,* e un'altra della dott. Maria Teresa Riccio sopra *Il sistema* ∞^6 *di* V_3^3 *di* S_5 *rappresentante le catene unidimensionali dell'* S_4 *di 1ª specie di Study,* proponendone l'accoglimento per la stampa. L'Accademia approva.

Il socio Malquori presenta, per il medesimo periodico, una nota del prof. Vittorio Cirilli, *Ricerche sull' azione catalitica delle soluzioni solide tra sesquiossidi nella decomposizione termica del protossido d' azoto.* È approvata all'unanimità.

Il socio Carnera presenta, a complemento delle precedenti ricerche sullo stesso argomento, una sua nota su *Le variazioni della latitudine ed il movimento del Polo di rotazione della terra durante l' anno 1947.*

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 giugno 1948.

Assistono all'adunanza, presieduta dalla socia anziana Bakunin, i soci ordinari Carnera, Carrelli, De Dominicis, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Giordani, Malquori, Pierantoni, Spampinato ed i corrispondenti Imbò e Nobile.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 8 maggio, che è approvato, e comunica che il consocio Longo, accogliendo l'invito dell'Accademia, ha pregato il prof. Lorenzo Parodi, direttore del Laboratorio di Botanica della Facoltà di Agronomia di Buenos Aires, di voler rappresentare l'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli al secondo Congresso Sud-Americano di Botanica, che avrà luogo a Tucumàn nel prossimo ottobre.

In occasione della ricorrenza del centenario della battaglia di Curtatone e Montanara il socio De Lorenzo dice poche parole *In memoria di Leopoldo Pilla:*

« Il 29 maggio 1848 » egli dice « Leopoldo Pilla combattendo, alla testa della prima compagnia del battaglione universitario toscano, contro gli austriaci per la libertà d'Italia, fu ucciso da una scheggia di granata sul campo di Curtatone. Egli era nato solo quarantatre anni prima, il 20 ottobre 1805, a Venafro, sul Volturno. Il centenario della sua nascita, nel 1905, fu celebrato a Venafro con due pubblicazioni commemorative e con l'apposizione di una lapide, di cui l'epigrafe fu dettata da Mario Rapisardi; a Roma con una commemorazione, tenuta da Mario Canavari alla Società geologica italiana, e con un'altra, fatta da Torquato Taramelli all'Accademia dei Lincei. A Napoli, nell'adunanza del 16 dicembre di questa nostra Accademia, il mio caro ed indimenticabile maestro Francesco Bassani ne lesse una commemorazione, perspicua di forma e completa di contenuto; la quale ancor oggi costituisce quanto di meglio si sia scritto su Leopoldo Pilla, ed alla quale solo può aggiungere qualche cosa chi avrà potuto studiare i manoscritti di Lui, conservati nella Biblioteca dell'Università di Pisa. Io riprendo la fiaccola, accesa da Bassani in memoria di Pilla, per trasmetterla a mia volta ai nostri successori e ricordare, così, alle venture generazioni un nostro conterraneo meridionale, che fu al tempo stesso geniale scienziato, valoroso insegnante e nobile figlio d'Italia; il quale versò il suo sangue e sacrificò la sua vita per la libertà e l'indipendenza della Patria. Quale scienziato il Pilla, che s'era laureato in medicina, ma s'era educato alla scuola geologica di suo padre Nicola Pilla ed a quella mineralogica di Nicola Covelli, studiò con genialità ed originalità la compagine e la costruzione geologica, eruttiva e sedimentaria della nostra penisola, dalla Sicilia alle Alpi, e della cerchia alpina fino a Vienna, indagandone e descrivendone anche le manifestazioni vulcaniche, sismiche e bradisismiche. Le cognizioni, così acquisite, Egli non le tenne per sè, ma le trasmise ai suoi discepoli, nelle lezioni di geologia, che teneva nel suo studio privato, ai Vergini, ed in quelle pubbliche di mineralogia, quale professore interinale all'Università di Napoli nel 1841; quando fu chiamato, per consiglio di Humboldt, dal Granduca di Toscana, Leopoldo II, ad insegnare mineralogia e geologia nell'Ateneo pisano. E di là, nel fatidico 1848, Egli si mosse alla testa dei suoi studenti, per cadere combattendo, il 29 maggio, sul campo di battaglia di Curtatone. Così Leopoldo Pilla servì col pensiero la scienza, con la parola l'insegnamento, con l'azione la Patria. Fu un Uomo. La sua memoria, oltre la morte, sia monito, e la sua figura, tenuta viva nei nostri ricordi, sia esempio agli italiani presenti e futuri ».

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente Mario Pascal che ne propone l'inserzione nel Rendiconto, una nota del prof. Mario Giovanardi *Sulla restituzione prospettica col quadro inclinato.* Indi legge una

lettera del socio corrispondente Girolamo Ippolito, che fa uguale proposta di accoglimento per la nota dell'ing. Michele Viparelli dal titolo: *Un problema di foronomia alla luce della teoria del potenziale.* Analogamente si esprime il socio corrispondente Mario Salfi, che scusa l'assenza, presentando una nota del prof. Marcello La Greca sopra *I nervi motori e sensori degli organi di volo degli Acrididi.*

Il socio Spampinato presenta una nota dell'ing. Ulderico Bencivenga *Sulla rappresentazione geometrica di alcune algebre reali del 3° ordine* e un'altra della dott. Anna Fiore dal titolo: *Elementi della teoria delle coniche e delle polarità piane biduali nella 1ª rappresentazione complessa,* perchè vengano accolte per la stampa nel Rendiconto.

Il socio Malquori presenta, con eguale proposta di stampa nel medesimo periodico, una nota dei dottori Luciano Vighi e Riccardo Sersale riguardante *Indagini sulla magnesia elettrofusa.*

L'Accademia a voti unanimi approva tutte le proposte predette, con le limitazioni in vigore.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 novembre 1948.

Presidenza della socia anziana Bakunin. Sono presenti i soci ordinari Colamonico, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Pierantoni, Spampinato ed il socio corrispondente Imbò.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 5 giugno, che è approvato. Indi comunica:

1.° la lettera 7 luglio del prof. Lorenzo Parodi, direttore del Laboratorio di Botanica di Buenos Aires, che accetta di rappresentare l'Accademia al Congresso Sud-americano di Botanica e ringrazia;

2.° la Ministeriale 30 settembre relativa alla relazione sull'attività accademica riguardante il periodo dal 1941 in poi. L'Accademia prende atto;

3.° l'invito della Società Italiana di Fisica a partecipare al Congresso che avrà luogo in Lecco nei prossimi giorni di novembre. L'Accademia dà la propria adesione, incaricando il socio Carrelli di volerla rappresentare.

Il socio Spampinato presenta una nota della prof. Carmela Carbonaro dal titolo « *I sistemi omaloidici di ipersuperficie dell'* S_4 *legati alle algebre complesse d'ordine 4, dotate di modulo* », proponendone l'accoglimento per l'inserzione nel Rendiconto. — L'Accademia a voti unanimi ne approva la stampa con le limitazioni in vigore.

Il prof. Pierantoni dà notizia delle pratiche recentemente svolte col Ministero per l'approvazione del nuovo Statuto e per la erogazione di un contributo ordinario annuo, che consentirà l'incremento delle pubblicazioni del Sodalizio.

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 dicembre 1948.

Assistono all' adunanza, presieduta dalla socia anziana Bakunin, i soci ordinari Carnera, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Malquori, Pierantoni ed i corrispondenti Nobile e Salfi.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza del dì 6 novembre, che è approvato. Indi comunica la morte, avvenuta in Torino il 2 ottobre scorso in età di 84 anni, del prof. Federico Sacco, che fu per lunghi anni ordinario di Geologia applicata nel Politecnico di Torino e incaricato di Paleontologia in quella Università e che con un numero considerevolissimo di pubblicazioni (più di 600) legò indissolubilmente il suo nome al progresso e alla volgarizzazione delle scienze geo-paleontologiche in Italia. La sua attività, che abbraccia un periodo di ben 64 anni, riguarda pure numerosi altri campi (glaciologia, astrofisica ecc.) e continuò inesausta fino alle ultime settimane di esistenza, come risulta da alcuni lavori che vedono la luce, dopo la morte dell' Autore, nei Rendiconti dei Lincei. Anche alla nostra Accademia, benchè non socio, Egli presentò, in questi ultimi anni, alcuni lavori di sintesi geologica su « *Le divisioni del Quaternario europeo* » e sopra « *Le facies e le oscillazioni batimetriche del Terziario italiano* », che vennero pubblicate nel Rendiconto del 1946 e del 1947.

Il segretario è sicuro d' interpretare l' unanime sentimento dei Colleghi inviando alla venerata memoria dello Scienziato scomparso, a cui egli era particolarmente legato da antica e devota affezione, un mesto e reverente saluto. L' Accademia si associa.

Si passa quindi alla trattazione di affari interni.

INDICE DEL VOLUME

M. Pascal — Commemorazione del socio ordinario Roberto Marcolongo . . Pag. 1

N. Spampinato — Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n nell' S_r proiettivo complesso . . . . . » 13

L. Carnera — Le variazioni di latitudine ed il movimento del Polo di rotazione terrestre negli anni 1945 e 1946 . . . . . » 18

G. Imbò — Conduttività termica approssimata per lave fluenti vesuviane . . » 29

G. Imbò — A proposito di un' analisi termica relativa a lava etnea del 1947 . » 36

G. D' Erasmo — I Proboscidati fossili nello stato attuale della scienza . . . » 41

U. Bencivenga — Di alcuni sistemi metrici nello spazio a tre dimensioni . . » 54

A. Scherillo — Commemorazione del socio corr. straniero Alfredo Lacroix . » 81

N. Spampinato — Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso . . . . . » 84

M. T. Riccio — Il sistema ∞^6 di V_3^3 di S_5 rappresentante le catene unidimensionali dell' S_4 di 1ª specie di Study . . . . . » 88

V. Cirilli — Ricerche sull' azione catalitica delle soluzioni solide tra sesquiossidi nella decomposizione termica del protossido di azoto . . . . » 92

L. Carnera — Le variazioni della latitudine ed il movimento del Polo di rotazione della terra durante l' anno 1947 . . . . . » 98

M. Giovanardi — Sulla restituzione prospettica col quadro inclinato . . . » 105

M. Viparelli — Un problema di foronomia alla luce della teoria del potenziale . » 114

M. La Greca — I nervi motori e sensori degli organi di volo degli Acrididi . » 121

U. Bencivenga — Sulla rappresentazione geometrica di alcune algebre reali del 3. ordine . . . . . » 131

A. Fiore — Elementi della teoria delle coniche e delle polarità piane biduali nella 1ª rappresentazione complessa . . . . . » 151

L. Vighi e R. Sersale — Indagini sulla magnesia elettrofusa . . . . . » 153

C. Marletta Carbonaro — I sistemi omaloidici di ipersuperficie dell'S_4, legati alle algebre complesse d' ordine 4, dotate di modulo . . . . » 168

Processi verbali delle adunanze del 3 gennaio, 7 febbraio, 6 marzo, 3 aprile, 8 maggio, 5 giugno, 6 novembre e 4 dicembre 1948. . . . . » 201

Indice del volume . . . . . » 208

INDICE

M. Pascal — Commemorazione del socio ordinario Roberto Marcolongo . . . Pag. 1

N. Spampinato — Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n nell' S_r proiettivo complesso . . . . . » 13

L. Carnera — Le variazioni di latitudine ed il movimento del Polo di rotazione terrestre negli anni 1945 e 1946 . . . . . » 18

G. Imbò — Conduttività termica approssimata per lave fluenti vesuviane . . » 29

G. Imbò — A proposito di un' analisi termica relativa a lava etnea del 1947 . » 36

G. D' Erasmo — I Proboscidati fossili nello stato attuale della scienza . . . » 41

U. Bencivenga — Di alcuni sistemi metrici nello spazio a tre dimensioni . . » 54

A. Scherillo — Commemorazione del socio corr. straniero Alfredo Lacroix . » 81

N. Spampinato — Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso . . . . . » 84

M. T. Riccio — Il sistema ∞^6 di V_3^3 di S_5 rappresentante le catene unidimensionali dell' S_4 di 1ª specie di Study . . . . . » 88

V. Cirilli — Ricerche sull' azione catalitica delle soluzioni solide tra sesquiossidi nella decomposizione termica del protossido di azoto . . . . . » 92

L. Carnera — Le variazioni della latitudine ed il movimento del Polo di rotazione della terra durante l' anno 1947 . . . . . » 98

M. Giovanardi — Sulla restituzione prospettica col quadro inclinato . . . » 105

M. Viparelli — Un problema di foronomia alla luce della teoria del potenziale . » 114

M. La Greca — I nervi motori e sensori degli organi di volo degli Acrididi . » 121

U. Bencivenga — Sulla rappresentazione geometrica di alcune algebre reali del 3. ordine . . . . . » 131

A. Fiore — Elementi della teoria delle coniche e delle polarità piane biduali nella 1ª rappresentazione complessa . . . . . » 151

L. Vighi e R. Sersale — Indagini sulla magnesia elettrofusa . . . . . » 153

C. Marletta Carbonaro — I sistemi omaloidici di ipersuperficie dell'S_4, legati alle algebre complesse d' ordine 4, dotate di modulo . . . . . » 168

Processi verbali delle adunanze del 3 gennaio, 7 febbraio, 6 marzo, 3 aprile, 8 maggio, 5 giugno, 6 novembre e 4 dicembre 1948. . . . . » 201

Indice del volume . . . . . » 208

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI